

Reinhard Diestel

# Graphentheorie

---

## 5. elektronische Auflage 2016

Nach dem englischen Original, Springer GTM

© Reinhard Diestel

Dies ist die deutsche Parallel-Ausgabe zum Springer *Graduate Text in Mathematics*, Band 173. Die Auflagen 1–4 der deutschen Ausgabe sind seinerzeit als Springer-Lehrbuch erschienen. Diese fünfte Auflage gibt es zunächst nur als eBook ohne Verlagsbindung, um deutschsprachigen Studenten eine kostengünstige Verständnishilfe des englischen GTM an die Hand zu geben, ohne durch das neue Preisbindungsgesetz von 2016 an Verlagspreise gebunden zu sein.

Für mathematische Profis gibt es eine elektronische Profi-Ausgabe mit Lösungshinweisen für die Aufgaben, plattformunabhängig als annotierbares, druckbares und intern verlinktes PDF. Mehr dazu auf der Seite

<http://diestel-graph-theory.com/german/>

Für iPad-Nutzer gibt es alternativ eine iOS-App zum Buch, die sowohl die Profi-Ausgabe als auch das eBook laden kann, auch kapitelweise.

Schließlich gibt es eine “Skript-Lizenz” für Uni-Bibliotheken, die Hörern einer dem Buch folgenden Vorlesung ein kostenloses Skript daraus an die Hand geben möchten. Einzelheiten dazu finden sich hier.

Dieses Buch, dieses Buch!

... für *Dagmar*



# Vorwort

---

Etwa zwanzig Jahre sind vergangen seit dem Erscheinen derjenigen Lehrbücher der Graphentheorie, die bis heute für die meisten Grundvorlesungen den inhaltlichen Rahmen setzen. Der hierin geschaffene Kanon hat die Graphentheorie geprägt, und er wird sie weiter prägen.

Gerade in der Graphentheorie jedoch hat sich in den letzten Jahren einiges getan. Die Vernetzung von Methoden und Resultaten hat zugenommen, es sind tiefe neue Sätze bewiesen worden, ja ganze Zweige sind neu entstanden: man denke etwa an den Brückenschlag zwischen ehemals so unversöhnlichen Invarianten wie chromatischer Zahl und Durchschnittsgrad durch den Begriff der Listenfärbungen, an den Einzug probabilistischer Methoden und des Regularitätslemmas in die extremale Graphentheorie oder die Ramseytheorie, oder an die Theorie der Baumzerlegungen und Minoren mit ihren Verbindungen zur topologischen Graphentheorie – um nur einige Entwicklungen anzusprechen.

Die Zeit scheint daher reif für eine Neubesinnung: *was sind heute die Grundpfeiler der Graphentheorie, die einer einführenden und doch in die Tiefe zielenden Vorlesung das Fundament geben können?*

Dieses Buch möchte Material für eine solche Vorlesung anbieten. Ich habe dabei den Spagat versucht, die zur Orientierung notwendige Schlantheit und Konzentration auf Wesentliches mit so ausführlicher Darstellung im Detail zu verbinden, dass sowohl die wichtigsten übergreifenden Ideen als auch jeder einzelne Beweis dem Selbststudium und einer unabhängigen Vor- oder Nachbereitung zugänglich werden.

Mein Hauptanliegen war es also, die mir als besonders grundlegend erscheinenden Resultate und Methoden möglichst genau darzustellen und zu illustrieren. Fast jedes Kapitel enthält dementsprechend neben den Grundtatsachen seines Gebietes mindestens einen anspruchsvolleren Satz, dessen Beweis jedoch genauso im Detail dargestellt ist wie die kürzeren Beweise. Nicht ohne Unbehagen bemerkte ich dann bald, dass diese etwas anspruchsvolleren Beweise im Druck zuweilen in der Tat recht

lang aussehen! Ich hoffe jedoch, dass gerade die relative Ausführlichkeit ihrer Darstellung letztlich die Lesezeit minimiert. . .

Entsprechend dem genannten Doppelziel bin ich bei der Auswahl des dargestellten Materials recht restriktiv gewesen: im Zweifelsfall habe ich lieber für einen zentralen Satz zwei oder drei verschiedenartige Beweise dargestellt als zwei oder drei ähnliche Sätze mit ähnlichen Beweisen aneinanderzureihen. Besonders in dieser Hinsicht ist der Text also bewusst als einführendes Lehrbuch geschrieben, nicht als Monographie mit dem Anspruch einer umfassenden Darstellung und Einordnung des vorhandenen Materials.

Der Text ist einerseits unmittelbar verwendbar als Skriptum einer Vorlesung, lässt durch seine Konzentration in der Stoffwahl jedoch andererseits dem Vorlesenden bewusst Raum zur weiteren Ausgestaltung. Eine denkbare Alternative zu kapitelweisem Vorgehen ist es, in einer ersten Vorlesung nach Kapitel 0 die jeweils einfacheren Abschnitte der Folgekapitel durchzunehmen, ergänzt je nach Hörerkreis vielleicht durch Algorithmen, und die mathematisch tieferen Sätze einer weiterführenden Vorlesung vorzubehalten.

Die zum Verständnis des Textes nötigen Vorkenntnisse beschränken sich auf einige Grundbegriffe aus der linearen Algebra für Kapitel 0.9, aus der Topologie (wie man sie im Analysis-Grundstudium kennenlernt) für Kapitel 3, und aus der Wahrscheinlichkeitstheorie für Kapitel 9. (Genau genommen wird dort sogar nur der Begriff des Wahrscheinlichkeitsraumes selbst vorausgesetzt; alle anderen Begriffe und Hilfsmittel werden noch einmal knapp aber explizit eingeführt.)

Die Bezifferung der Sätze, Propositionen, Lemmas und Korollare erfolgt einheitlich im ganzen Buch durch drei Ziffern: Korollar 1.2.3 etwa findet sich in Kapitel 1, Abschnitt 2, und es folgt auf Satz 1.2.2. Mit dem Prädikat „Satz“ bin ich sicher etwas sparsamer umgegangen, als es üblich ist – in der Absicht, zur besseren Orientierung die besonders zentralen Resultate entsprechend hervorzuheben. In den Notizen am Ende eines jeden Kapitels finden sich Hinweise auf weitere Literatur, darunter auf die Originalquellen aller Sätze, deren Quellenangabe nicht in einer der zitierten Monographien oder Übersichtsartikel zu finden ist. Das Symbol  $\square$  bezeichnet meist das Ende eines Beweises. Steht es direkt im Anschluss an die hervorgehobene Aussage selbst, so soll es andeuten, dass der Beweis dieser Aussage nach dem zuvor Gesagten klar sei – und ist eine Aufforderung, dies zu überprüfen! Tiefere Sätze, die ohne Beweis zitiert werden, sind entsprechend durch das Fehlen des  $\square$ -Symbols als solche zu erkennen.

Um die praktische Vorbereitung einer Vorlesung, die auf diesem Buch oder Teilen daraus aufbaut, zu erleichtern, sind zu Beginn eines jeden Beweises in der Randspalte die Nummern derjenigen Resultate aufgeführt, die in den Beweis eingehen und daher vorher behandelt oder zumindest erwähnt sein sollten. Diese Nummern sind in runde Klammern

mern gesetzt: der Verweis (3.1.2) im Rand neben dem Beweis von Satz 3.3.2 etwa besagt, dass das Lemma 3.1.2 in diesem Beweis verwendet wird. Entsprechend findet sich bereits in der Randspalte neben Lemma 3.1.2 in eckigen Klammern der Hinweis [3.3.2] darauf, dass dieses Lemma einmal im Beweis von Satz 3.3.2 Verwendung finden wird. Diese Verweise in den Randspalten berücksichtigen nur Abhängigkeiten zwischen Resultaten aus verschiedenen Abschnitten (sowohl desselben Kapitels als auch verschiedener Kapitel). Verweise innerhalb eines Abschnitts gibt es nicht; jeder Abschnitt bildet von der Darstellung her eine Einheit und sollte entsprechend von vorne gelesen werden. Wem all dies zu aufwendig ist, der kann sich einfach an die natürliche Reihenfolge der Kapitel und ihrer Abschnitte halten: mit zwei – deutlich im Text gekennzeichneten – Ausnahmen greifen Beweise stets nur auf früher behandelte Resultate zurück.

Wer ein Lehrbuch schreibt, muss sich für eine Terminologie entscheiden – und setzt damit die Freundschaft all jener aufs Spiel, deren Herz an einer anderen hängt. Ich habe lange überlegt, ob ich überhaupt eine deutsche Fassung dieses Buches schreiben sollte. Dies zu tun, dann aber die wohletablierte deutsche Terminologie weitgehend durch Anglizismen zu ersetzen (wie es im lockeren deutschen Sprachgebrauch ja durchaus verbreitet ist), erschien mir jedoch als absurd – und das Studium eines Anfängers auch nicht gerade erleichternd. Der Text folgt daher im wesentlichen der auf König und Wagner zurückgehenden deutschen Begriffsbildung;<sup>1</sup> Andersdenkende bitte ich um Nachsicht! Um dennoch ein wenig beim Brückenschlag zur englischen Terminologie zu helfen, gibt das Hauptregister am Ende des Buches zu jedem deutschen Fachwort in Klammern das in der englischen Fassung dieses Buches verwendete Wort, und der englisch-deutsche Index gibt für die gebräuchlichsten englischen Ausdrücke neben der Textstelle ihrer Definition auch ihre deutsche Entsprechung an.

Fast jedes Buch enthält Fehler, und dieses Buch wird kaum eine Ausnahme sein. Alle, denen verbliebene Fehler oder Verbesserungsmöglichkeiten auffallen, bitte ich herzlich, sie mir mitzuteilen: entweder direkt, oder über

<http://www.springer.de/catalog/html-files/deutsch/math/3540609180.html>

Dies ist die zu diesem Buch gehörige Web-Seite bei Springer: dort wird es neben der Verlagsinformation einen *link* geben zu einer von mir unterhaltenen Seite, die unter anderem notwendig gewordene Korrekturen in möglichst lesbarer Form bereitstellen soll.

An einem Lehrbuch ist fast nichts wirklich neu; selbst Stil und Materialauswahl sind unumgänglich durch Vorbilder geprägt. Das Lehrbuch,

---

<sup>1</sup> mehr dazu in den Notizen zu Kapitel 0

welches mich geprägt hat wie kein anderes, ist jenes am Anfang dieses Vorworts bereits mit angedeutete Springer-Buch von B. Bollobás: in der Vorlesung seines Autors, die jenes Buch nachzeichnet, habe ich meine erste Graphentheorie gelernt. Alle, die jenes Buch kennen, werden seinen Einfluss hier spüren – bei allen Unterschieden in Stoff und Darbietung.

Weiter geht mein Dank an alle, die mir durch Rat bei der Stoffauswahl, durch Literaturhinweise, oder bei der Fehlersuche geholfen haben. Besonders profitiert habe ich von der Hilfe von N. Alon, Th. Andreae, W.A. Deuber, R. Halin, M. Hintz, A. Huck, R. Klimmek, D. Kühn, L. Lovász, W. Mader, J. Nešetřil, P. Niemeyer, H.J. Prömel, A. Schrijver, A.D. Scott, D. Seese, P.D. Seymour, A. Steger, M. Stiebitz, Th. Szücs (für die Abbildungen), R. Thomas, C. Thomassen, B. Toft, W. Vogler, K. Waas und G.M. Ziegler. Ganz besonders danken aber möchte ich meinem Mitarbeiter und Kollegen Tommy R. Jensen: er hat die Entstehung dieses Buches kritisch begleitet von der Konzeption der am schwierigsten darzustellenden Beweise bis hin zu all den fehlenden Kommas, er hat mich viel über Färbungen gelehrt und alles, was ich über  $k$ -Flüsse weiß, und er hat bei all diesem nie seinen Gleichmut verloren, wenn ich mich einmal mehr entschied, einen von ihm gefundenen Fehler lieber großzügig zu ignorieren als durch seine Korrektur den vermeintlichen Textfluss zu hemmen. . .

So wünsche ich allen Lesern viel Freude an der hier dargestellten Mathematik, und ich selbst freue mich auf alle kritischen Kommentare.

RD, im Juni 1996

### Zur zweiten Auflage:

Die vorliegende zweite Auflage enthält neben Korrekturen, Glättungen im Text und einer Reihe von Vereinfachungen in den Beweisen einige Zusätze.

So bietet das Zusammenhangskapitel jetzt zwei wunderschöne und ganz kurze neue Beweise des Menger-Satzes von Göring (bzw. Böhme, Göring und Harant). Im ersten Kapitel gibt es eine formale Einführung normaler Spannbäume – den Informatikern als *Tiefensuchbäume* bekannt – sowie der durch Spannbäume induzierten Baumordnung auf der Eckenmenge eines Graphen. Das Paarungskapitel enthält zusätzlich einen direkten Beweis des Satzes von Tutte über 1-Faktoren, das Kapitel über Teilstrukturen einen Beweis von Lemma 6.4.3, der die Anwendung des Regularitätslemmas besonders schön illustriert, und das Minorenkapitel eine noch ausführlichere Behandlung von Baumzerlegungen und Baumweite.

Am deutlichsten verändert hat sich in der Tat das Minorenkapitel: unter anderem bietet es jetzt einen kurzen Beweis des Dualitätssatzes

zur Baumweite – einen Beweis, der nur in diesem Buch zu finden ist (und in der englischen Parallelausgabe).

Neu ist schließlich der Anhang mit Lösungshinweisen zu den Übungsaufgaben. Diese sind im wesentlichen von Tommy Jensen erarbeitet worden, dem ich dafür herzlich danke. Wer sich gleich nach dem Lesen einer Aufgabe den entsprechenden Hinweis anschaut, wird diesen vielleicht nicht immer besonders erhellend finden. Das ist durchaus so gemeint: Sinn der Hinweise ist natürlich nicht, die eigene Beschäftigung mit den Aufgaben zu ersetzen, sondern demjenigen auf die richtige Spur zu helfen, der die Fragestellung bereits verstanden und sich eine zeitlang mit der Aufgabe beschäftigt hat, aber vielleicht einem falschen Ansatz gefolgt ist. Insbesondere sind die Aufgaben auch mit den Hinweisen für die Übungsgruppenarbeit parallel zur Vorlesung geeignet.

Ergänzend sei noch auf die englische Ausgabe des Buchs verwiesen (Springer GTM 173). Dort finden sich unter anderem ein neuer Beweis (von Gasparian) des Satzes über perfekte Graphen von Lovász, ein Beweis des Regularitätslemmas, sowie in der zweiten Auflage ein kurzer Beweis (8 Seiten) des fundamentalen Satzes 10.6.3 von Robertson & Seymour, dass hohe Baumweite jeden plättbaren Graphen als Minor erzwingt.

Die Web-Seiten dieses Buchs sind mir nach Hamburg gefolgt und jetzt in

<http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graphentheorie/>

beheimatet. Dort finden sich, wie bisher, auch die aktuellen Korrekturen – übrigens nicht in ermüdendem Logbuch-Format sondern schön lesbar als Randbemerkungen im PDF-Bild der Originalseite.

Mein Dank geht an alle, die durch Anregungen und Kritik diese zweite Auflage haben verbessern helfen. Ich bleibe auch weiterhin an Verbesserungsvorschlägen und Korrekturen interessiert!

RD, im Juli 2000

### **Zur dritten Auflage:**

Mit der dritten Auflage ist nun auch die deutsche Ausgabe dieses Buchs „erwachsen geworden“: hinkte sie in den ersten beiden Auflagen dem englischen Original noch hier und da ein wenig hinterher, so ist sie ihm jetzt durchweg im Detail angeglichen und damit fast ebenbürtig. Es gibt weiterhin drei größere Teile, die sich nur in der englischen Ausgabe finden: das auch dort neue Kapitel über unendliche Graphen, den Beweis



des Regularitätslemmas, und zwei Beweise aus dem Minorenkapitel.<sup>2</sup> Der gesamte Rest jedoch ist jetzt eins zu eins übertragen. Ganz erheblich geholfen dabei hat mir Melanie Win Myint; ihr gebührt dafür – wie auch für die Erstellung des Besten Registers Aller Zeiten – mein aufrichtiger Dank.

Was also ist neu? Eine ganze Menge. Zum einen habe ich Themen neu aufgenommen, die in den letzten Jahren Gegenstand neuerer Entwicklungen waren und daher in einer modernen einführenden Darstellung der Graphentheorie nicht fehlen sollten. Dazu gehören durchaus einige Klassiker – etwa der Satz von Erdős und Pósa, oder stabile Paarungen – aber auch ganz neue Ergebnisse, wie der Struktursatz von Robertson und Seymour für die Graphen, die einen beliebigen fest vorgegebenen Minor nicht enthalten. Dieser Satz spielt eine zunehmend zentrale Rolle nicht nur in der Minorentheorie, ist aber nirgendwo sonst in kompakter Form nachzulesen. Auch hier braucht die Darstellung allein seiner Aussage, einschließlich aller notwendigen Begriffe, eine ganze Seite – doch es lohnt sich!

Weiter gibt es jetzt noch mehr Hintergrundanalysen zu wichtigen Beweisen, die dem Leser ihre Entstehung und wichtigsten Ideen nahebringen sollen. Ein typisches Beispiel etwa ist eine nachträgliche Analyse, wie genau das Regularitätslemma im Beweis des Satzes von Erdős und Stone zur Anwendung kommt: während der Beweis selbst mit der nicht nachvollziehbaren Wahl aller relevanten Parameter für das Regularitätslemma beginnt, geht die nachträgliche Analyse von den leitenden Ideen aus und endet mit der dadurch nach und nach determinierten Wahl der Parameter.

Schließlich gibt es eine Unmenge an Verbesserungen im Detail, einschließlich einiger eleganter neuer Beweise klassischer Sätze. Bereits gut eingeführte Beweise habe ich dabei in der Substanz nicht angetastet, sondern allenfalls noch ein wenig geglättet: wer das Buch bereits als Vorlesungstext benutzt und gemocht hat, kann seine Notizen dazu weiterhin verwenden. . .

Einmal mehr geht mein Dank an alle, die durch Hinweise und Anregungen zur Verbesserung oder Konsolidierung dieser Neuauflage beigetragen haben. Dazu gehören nicht zuletzt die Hörer meiner Graphentheorie-Vorlesung im Wintersemester 2005/06: bis wenige Tage vor Drucklegung haben sie das Skript geprüft und Verbesserungen vorgeschlagen. Etliche werden jetzt „ihren“ Beitrag im Text wiederfinden. . . Allen bisherigen und neuen Lesern ein weiteres Mal viel Freude!

RD, im Januar 2006

---

<sup>2</sup> Dies sind der Beweis des Struktursatzes (10.6.3) von Robertson und Seymour für die Graphen ohne einen gegebenen plättbaren Minor, sowie der darauf aufbauende Beweis des „allgemeinen Kuratowskisatzes“, dass die Einbettbarkeit in eine gegebene Fläche stets durch das Verbot nur endlich vieler Minoren charakterisierbar ist.

### Zur vierten Auflage:

Diese vierte Auflage ist vor allem eine der Konsolidierung: es sind keine ganz neuen Bereiche hinzugekommen, wohl aber einige neue Beweise klassischer Sätze, ein oder zwei kleinere und sehr feine neue Sätze, sowie zahllose weitere Feinschliffe.

Gefeilt habe ich an allem, was mir selbst bei Vorlesungen an noch verbliebenen Kantigkeiten auffiel, oder was mir Leser netterweise an un vermuteten Möglichkeiten zu Missverständnissen mitteilten. Hier und da führte das auch mal zu einem Neuentwurf eines ganzen Abschnitts: so ist etwa der Abschnitt im ersten Kapitel, in dem erstmals Minoren eingeführt werden, neu konzipiert und – hoffe ich – jetzt noch verständlicher.

Substanziell neue Beweise gibt es für die folgenden Klassiker: den Heiratssatz, den Baumpackungssatz, Tuttés Sätze zur Konstruktion 3-zusammenhängender Graphen, und den Satz über Schwellenfunktionen bei Zufallsgraphen. Erhebliches getan hat sich auch im Kapitel über Hamiltonkreise: Fleischners Satz zur Existenz eines Hamiltonkreises im Quadrat 2-zusammenhängender Graphen ist durch seinen genial-kurzen neuen Beweis von Georgakopoulos – den es nur hier zu lesen gibt – noch schöner geworden, und von Asratian und Khachatryan gibt es neu einen ziemlich genialen ganz kurzen Satz in Form eines lokalen Kriteriums zur Existenz von Hamiltonkreisen, der gleich mehrere Klassiker impliziert.

Die Webseite des Buchs ist der seiner größeren englischen Schwester gefolgt nach

<http://diestel-graph-theory.com/>

Dort wird es wie bisher bei Bedarf eine Seite mit Errata geben, sowie verschiedene eBook-Ausgaben.

Viel Freude beim Lesen!

RD, im Juni 2010

### Zur fünften Auflage:

Diese fünfte deutsche Auflage folgt der englischen in zwei wesentlichen Neuerungen, die ich gleich beschreiben werde. Damit ist sie wieder eine getreue Übersetzung fast der gesamten englischen Originalausgabe, die lediglich im Minorenkapitel zwei längere Beweise auslässt. (Und natürlich das schönste Kapitel der englischen Ausgabe: das Kapitel über unendliche Graphen und deren Bezüge zur Topologie. . .)

Der Abschnitt über Baumpackungen und Arborizität beweist jetzt nur noch einen zentralen Satz: eine geniale Vereinheitlichung der ehemals dualen klassischen Sätze über Baumpackungen und Baum-Überdeckungen, die Bowler und Carmesin für unendliche Matroide entwickelt haben.

Kapitel 1.4 beweist den Satz für endliche Graphen und leitet dann mühelos die beiden Klassiker daraus her. Diesen Beweis gibt es nur hier zu lesen, in diesem Buch.

Das Minorenkapitel enthält jetzt einen längst überfälligen neuen Abschnitt über *Tangles*: einen zentralen Zusammenhangsbegriff der Minorentheorie, den Robertson und Seymour einst für den Beweis des Minorensatzes entwickelten, der mittlerweile jedoch weit über die Graphentheorie ausstrahlt. Dies ist möglich geworden durch eine erst kürzlich entwickelte Theorie abstrakter Teilungen diskreter Strukturen, die hochzusammenhängende Cluster beschreiben kann nicht nur in Graphen und Matroiden, sondern ganz allgemein in (Daten-) Mengen, die lediglich einige wenige axiomatisch vorgegebene Eigenschaften haben müssen.

Die Darstellung in Kapitel 10.5 folgt diesem modernen Ansatz. Dadurch ist es möglich geworden, selbst in unserem Rahmen Verschärfungen beider zentraler Sätze über Tangles von Robertson und Seymour zu beweisen: den Dualitätssatz 10.5.1 über Tangles und Baumweite, sowie den Tangle-Struktursatz, dass jeder endliche Graph eine Baumzerlegung hat, deren induzierte Teilungen all seine überhaupt unterscheidbaren Tangles unterscheidet (Satz 10.5.4).

Als Korollar aus Satz 10.5.1 ergibt sich ganz nebenbei ein neuer, tangleartiger, Dualitätssatz für Baumweite (Satz 10.5.3).

Schließlich gibt es eine Änderung gegenüber früheren Auflagen bei den ehemals angehängten Lösungshinweisen für die Übungsaufgaben. Diese so zu gestalten, dass sie die Lösungen nicht einfach verraten, sondern nur verständlich sind nach eigener intensiver Bemühung, war zwar immer mein Ziel gewesen – doch ist es mir nicht immer gelungen. Um die Aufgaben auch weiterhin als in Übungen nutzbar zu erhalten, die einer auf dem Buch aufbauenden Vorlesung folgen, habe ich mich entschlossen, diese Hinweise nicht mehr in der gedruckten Ausgabe des Buchs öffentlich zu machen, sondern sie der elektronischen Profi-Ausgabe vorzubehalten, die von Dozenten und professionellen Mathematikern über die Webseiten des Buchs,

<http://diestel-graph-theory.com/>

bezogen werden kann.

Es gibt sie also noch, die Lösungshinweise, und sie werden weiter gepflegt – doch eben an anderer Stelle. Sie sind ebenfalls enthalten in der Profi-Variante der – deutschen oder englischen – Ausgabe des Buchs für iPads, die aus seiner iOS-App *Graph Theory* ladbar ist. Dort sind auch alle früheren Auflagen des Buchs, die ja zum Teil andere Beweise enthielten, weiterhin zugänglich.

RD, im August 2016

# Inhalt

---

Vorwort .....	vii
0. Grundbegriffe .....	1
0.1 Graphen* .....	2
0.2 Der Grad einer Ecke* .....	5
0.3 Wege und Kreise* .....	7
0.4 Zusammenhang* .....	11
0.5 Bäume und Wälder* .....	14
0.6 Bipartite Graphen* .....	18
0.7 Minoren und Kontraktion* .....	20
0.8 Eulersche Graphen* .....	23
0.9 Algebraisches .....	25
0.10 Verwandte Begriffsbildungen .....	30
Übungen .....	32
Notizen .....	36
1. Paarungen, Packungen, Überdeckungen .....	39
1.1 Paarungen in bipartiten Graphen* .....	40
1.2 Paarungen in allgemeinen Graphen <sup>(*)</sup> .....	46
1.3 Der Satz von Erdős und Pósa .....	50
1.4 Baumpackungen und Arborizität .....	53
1.5 Überdeckungen durch disjunkte Wege .....	57
Übungen .....	59
Notizen .....	62

---

\* Die mit einem Sternchen gekennzeichneten Abschnitte, und die Anfänge der mit (\*) gekennzeichneten Abschnitte, bilden zusammen einen Stoffvorschlag für eine einsemestrige einführende Vorlesung.

2. Zusammenhang .....	65
2.1 2-zusammenhängende Graphen und Untergraphen* .....	65
2.2 Die Struktur 3-zusammenhängender Graphen <sup>(*)</sup> .....	68
2.3 Der Satz von Menger* .....	74
2.4 Der Satz von Mader .....	79
2.5 Wegverbindungen <sup>(*)</sup> .....	81
Übungen .....	90
Notizen .....	94
3. Graphen in der Ebene .....	97
3.1 Topologische Voraussetzungen* .....	98
3.2 Ebene Graphen* .....	100
3.3 Zeichnungen .....	107
3.4 Plättbarkeit: der Satz von Kuratowski* .....	112
3.5 Algebraische Plättbarkeitskriterien .....	117
3.6 Plättbarkeit und Dualität .....	119
Übungen .....	123
Notizen .....	127
4. Färbungen .....	129
4.1 Landkarten und das Färben ebener Graphen* .....	130
4.2 Eckenfärbungen* .....	132
4.3 Kantenfärbungen* .....	137
4.4 Listenfärbungen .....	140
4.5 Perfekte Graphen .....	145
Übungen .....	154
Notizen .....	158
5. Flüsse .....	161
5.1 Flüsse und Rundflüsse <sup>(*)</sup> .....	162
5.2 Netzwerke* .....	163
5.3 Gruppenwertige Flüsse .....	167
5.4 $k$ -Flüsse für kleine $k$ .....	172
5.5 Flüsse und Färbungen .....	174
5.6 Die Tutteschen Flussvermutungen .....	179
Übungen .....	183
Notizen .....	185

6. Extremale Graphentheorie .....	187
6.1 Teilgraphen* .....	188
6.2 Minoren <sup>(*)</sup> .....	194
6.3 Die Hadwiger-Vermutung* .....	199
6.4 Szemerédis Regularitätslemma .....	203
Übungen .....	211
Notizen .....	214
7. Ramseytheorie für Graphen .....	219
7.1 Der Satz von Ramsey* .....	220
7.2 Ramseyzahlen von Graphen .....	224
7.3 Ramsey induziert .....	228
7.4 Ramseysätze und Zusammenhang .....	238
Übungen .....	241
Notizen .....	243
8. Hamiltonkreise .....	245
8.1 Hinreichende Bedingungen* .....	245
8.2 Hamiltonkreise und Gradsequenz .....	250
8.3 Hamiltonkreise im Quadrat eines Graphen .....	252
Übungen .....	258
Notizen .....	259
9. Zufallsgraphen .....	263
9.1 Der Begriff des Zufallsgraphen* .....	264
9.2 Die probabilistische Methode* .....	270
9.3 Eigenschaften fast aller Graphen* .....	272
9.4 Schwellenfunktionen und zweite Momente .....	276
Übungen .....	284
Notizen .....	285
10. Minoren .....	287
10.1 Wohlquasiordnung <sup>(*)</sup> .....	288
10.2 Der Minorensatz für Bäume .....	289
10.3 Baumzerlegungen <sup>(*)</sup> .....	291
10.4 Baumweite <sup>(*)</sup> .....	296

10.5 Knäuel .....	301
10.6 Baumweite und verbotene Minoren .....	311
10.7 Der Minorensatz* .....	316
Übungen .....	319
Notizen .....	326
Lösungshinweise für alle Übungen .....	331
Register .....	333
Englisch-deutscher Index .....	349
Symbolverzeichnis .....	353

In diesem Kapitel stellen wir in relativ kompakter Form die in der Graphentheorie üblichen Grundbegriffe zusammen. Glücklicherweise sind fast all diese Begriffe und ihre Bezeichnungen anschaulich und ganz leicht zu merken; schwierigere Begriffsbildungen, die erst vor dem Hintergrund gewisser Sachverhalte natürlich werden, führen wir dann jeweils später ein.

Bereits ab Abschnitt 0.2 werden wir schon laufend kleinere aber wichtige Tatsachen beweisen, um so die neuen Worthülsen gleich mit etwas Leben zu erfüllen. Häufig wird uns dabei die Frage leiten, wie verschiedene soeben definierte Grapheninvarianten voneinander abhängen: diese Frage zieht sich wie ein roter Faden durch wesentliche Teile der Graphentheorie, und es ist gut, von Anfang an ein Gespür dafür zu entwickeln.

Die Menge der natürlichen Zahlen, einschließlich der Null, bezeichnen wir mit  $\mathbb{N}$ . Mit  $\mathbb{Z}_n$  bezeichnen wir den Restklassenring  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen modulo  $n$ ; seine Elemente schreiben wir kurz als  $\bar{i} := i + n\mathbb{Z}$ . Ist  $x$  eine reelle Zahl, so bezeichnet  $\lfloor x \rfloor$  die größte ganze Zahl  $\leq x$ , und  $\lceil x \rceil$  die kleinste ganze Zahl  $\geq x$ . Mit  $\log$  bezeichnete Logarithmen haben die Basis 2. Wird  $x$  definiert, als  $y$ , so schreiben wir dafür  $x := y$  oder  $y =: x$ . Zwei Mengen *treffen* einander, wenn sie einen nicht leeren Schnitt haben. Eine Menge  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$  disjunkter Teilmengen einer Menge  $A$  ist eine *Partition* von  $A$ , wenn  $\bigcup \mathcal{A} := \bigcup_{i=1}^k A_i = A$  ist und  $A_i \neq \emptyset$  für jedes  $i$ . Mit  $[A]^k$  bezeichnen wir die Menge aller  $k$ -elementigen Teilmengen von  $A$ . Wir verwenden den Ausdruck „entweder ... oder“ synonym mit „oder“, also im einschließenden Sinne; die längere Version dient lediglich dem Ziel größerer syntaktischer Klarheit. Die Worte „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“ kürzen wir als „oBdA“ ab.

$\mathbb{N}$   
 $\mathbb{Z}_n$   
 $\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil$   
 $\log$   
 $:=$   
*treffen*  
 $\bigcup$   
*Partition*  
 $[A]^k$



## 0.1 Graphen

*Graph* Ein *Graph* ist ein Paar  $G = (V, E)$  disjunkter Mengen mit  $E \subseteq [V]^2$ ; die Elemente von  $E$  sind also 2-elementige Teilmengen von  $V$ . Die Elemente von  $V$  nennt man die *Ecken* (oder *Knoten*) des Graphen  $G$ , die Elemente von  $E$  seine *Kanten*. Bildlich kann man  $G$  darstellen, indem man seine Ecken als Punkte zeichnet und zwei dieser Punkte immer dann durch eine Linie verbindet, wenn die entsprechenden Ecken eine Kante sind (Abb. 0.1.1). Wie man diese Punkte und Linien zeichnet, ob gerade oder geschwungen, disjunkt oder überkreuz, ist eine Frage der Zweckmäßigkeit und der Ästhetik: die formale Definition eines Graphen ist jedenfalls von seiner bildlichen Darstellung unabhängig.

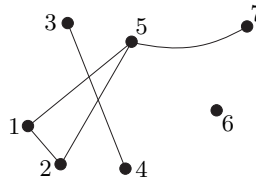


Abb. 0.1.1. Der Graph auf  $V = \{1, \dots, 7\}$  mit der Kantenmenge  $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{5, 7\}\}$

*auf* Ein Graph  $G = (W, F)$  ist ein Graph *auf*  $W$ ; seine Eckenmenge  $V(G), E(G)$   $W$  bezeichnen wir mit  $V(G)$ , seine Kantenmenge  $F$  mit  $E(G)$ . Statt  $v \in V(G)$  oder  $e \in E(G)$  schreiben wir gelegentlich auch einfach  $v \in G$  oder  $e \in G$ . Der Graph  $G$  heißt *endlich* bzw. *unendlich* je nachdem, ob  $V(G)$  endlich oder unendlich ist. Ist nichts anderes gesagt, so sind unsere Graphen endlich. Statt  $|V(G)|$  schreiben wir auch  $|G|$  und nennen  $|G|$  die *Ordnung* von  $G$ ; statt  $|E(G)|$  schreiben wir  $\|G\|$ .

$|G|, \|G\|$   
Ordnung  
 $\emptyset$   
trivialer  
Graph

Den *leeren* Graphen  $(\emptyset, \emptyset)$  bezeichnen wir kurz mit  $\emptyset$ . Einen Graphen der Ordnung 0 oder 1 nennen wir *trivial*. Manchmal, etwa bei Induktionsanfängen, kommen triviale Graphen gelegen; anderswo bilden sie lästige Ausnahmen. Um die Darstellung der wesentlichen Aussagen nicht unnötig zu verkomplizieren, werden wir solche Ausnahmen, insbesondere für den leeren Graphen  $\emptyset$ , in der Regel nicht explizit nennen sondern großzügig ignorieren.

*inzident* Eine Ecke  $v$  und eine Kante  $e$  *inzidieren* miteinander und heißen *inzident*, wenn  $v \in e$  gilt. Die beiden Ecken einer Kante sind ihre *Endecken*, und sie *verbindet* diese Ecken. Für eine Kante  $\{x, y\}$  schreiben wir kürzer auch  $xy$  (oder  $yx$ ). Ist  $x \in X \subseteq V$  und  $y \in Y \subseteq V$ , so ist  $xy$  eine *X–Y-Kante*. Die Menge aller X–Y-Kanten in einer Menge  $E$  bezeichnen wir mit  $E(X, Y)$ ; für  $E(\{x\}, Y)$  und  $E(X, \{y\})$  schreiben wir kurz  $E(x, Y)$  und  $E(X, y)$ . Die Menge  $E(v, V \setminus \{v\})$  aller mit  $v$  inzidenten Kanten bezeichnen wir mit  $E(v)$ .

$E(X, Y)$   
 $E(v)$

Zwei Ecken  $x, y$  von  $G$  sind (*adjazent* oder) *benachbart* in  $G$  und heißen *Nachbarn* voneinander, wenn  $\{x, y\} \in E(G)$  ist. Zwei Kanten  $e \neq f$  sind *benachbart*, falls sie eine gemeinsame Endecke haben. Sind je zwei Ecken von  $G$  benachbart, so heißt  $G$  *vollständig*. Einen vollständigen Graphen auf  $n$  Ecken bezeichnen wir mit  $K^n$ ; ein  $K^3$  ist ein *Dreieck*.

Nachbarn  
vollständig  
 $K^n$

Paarweise nicht benachbarte Ecken oder Kanten nennt man *unabhängig*. Formaler: eine Teilmenge von  $V$  oder von  $E$  heißt *unabhängig*, wenn ihre Elemente paarweise nicht benachbart sind. Unabhängige Eckenmengen nennt man auch *stabil*.

unabhängig

Im Folgenden sei  $G' = (V', E')$  ein weiterer Graph. Eine Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V'$  ist ein *Homomorphismus* von  $G$  nach  $G'$ , wenn  $\varphi$  die Benachbarkeit von Ecken erhält, wenn also für  $\{x, y\} \in E$  stets  $\{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E'$  gilt. Insbesondere ist dann für jede Ecke  $x'$  im Bild von  $\varphi$  ihr Urbild  $\varphi^{-1}(x')$  eine unabhängige Eckenmenge in  $G$ . Ist  $\varphi$  bijektiv und auch die Umkehrabbildung  $\varphi^{-1}$  ein Homomorphismus, so ist  $\varphi$  ein *Isomorphismus*, die Graphen  $G, G'$  heißen *isomorph*, und wir schreiben  $G \simeq G'$ . Ein Isomorphismus von  $G$  nach  $G$  ist ein *Automorphismus* von  $G$ .

Homomorphismus

isomorph  
 $\simeq$

Wir unterscheiden meist nicht zwischen isomorphen Graphen, schreiben also  $G = G'$  statt  $G \simeq G'$ , sprechen von „dem“ vollständigen Graphen auf 17 Ecken usw. Wollen wir in informellem Sprachgebrauch ausdrücken, dass es uns bei der Beschreibung eines Graphen nur um seinen Isomorphietyp geht, so nennen wir den Graphen *abstrakt*.

=

Eine unter Isomorphie abgeschlossene Klasse von Graphen nennen wir eine *Eigenschaft* von Graphen. „Ein Dreieck zu enthalten“ etwa ist eine Grapheneigenschaft: hat  $G$  drei paarweise benachbarte Ecken, so hat auch jeder zu  $G$  isomorphe Graph drei solche Ecken. Eine Funktion, die Graphen als Argumente hat und isomorphen Graphen gleiche Werte zuordnet, nennt man eine (Graphen-) *Invariante*. Eckenzahl und Kantenzahl sind einfache Grapheninvarianten; die größte Anzahl paarweise benachbarter Ecken etwa wäre eine weitere.

Eigenschaft

Invariante

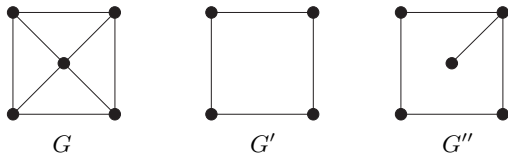


Abb. 0.1.2. Ein Graph  $G$  mit Teilgraphen  $G'$  und  $G''$ :  
 $G'$  ist Untergraph von  $G$ ,  $G''$  ist es nicht.

Wir setzen  $G \cup G' := (V \cup V', E \cup E')$  und  $G \cap G' := (V \cap V', E \cap E')$ . Ist  $G \cap G' = \emptyset$ , so heißen  $G$  und  $G'$  *disjunkt*. Gilt  $V' \subseteq V$  und  $E' \subseteq E$ , so ist  $G'$  ein *Teilgraph* von  $G$  (und  $G$  ein *Obergraph* von  $G'$ ), geschrieben  $G' \subseteq G$ . Informell sagen wir häufig einfach, dass  $G$  den Graphen  $G'$  *enthält*. Der Teilgraph  $G'$  heißt *induziert* oder *aufgespannt* (von  $V'$  in  $G$ ), wenn er *alle* Kanten  $xy \in E$  mit  $x, y \in V'$  enthält. Einen solchen

$G \cap G'$   
Teilgraph  
 $G' \subseteq G$   
induziert

Untergraph  
 $G[V']$

induzierten Teilgraphen nennen wir einen *Untergraphen*. Wir bezeichnen  $G'$  dann auch mit  $G[V']$ ; dies ist also der Graph auf  $V'$ , dessen Kanten genau die Kanten von  $G$  sind, deren Enden beide in  $V'$  liegen. Ist  $G'$  ein Teilgraph von  $G$  (aber nicht notwendig ein Untergraph), so schreiben wir statt  $G[V(G')]$  auch kürzer  $G[G']$ . Umgekehrt nennt man  $G' \subseteq G$  einen *aufspannenden* Teilgraphen von  $G$ , wenn  $V'$  ganz  $G$  aufspannt, d.h. wenn  $V' = V$  ist.

auf-  
spannend

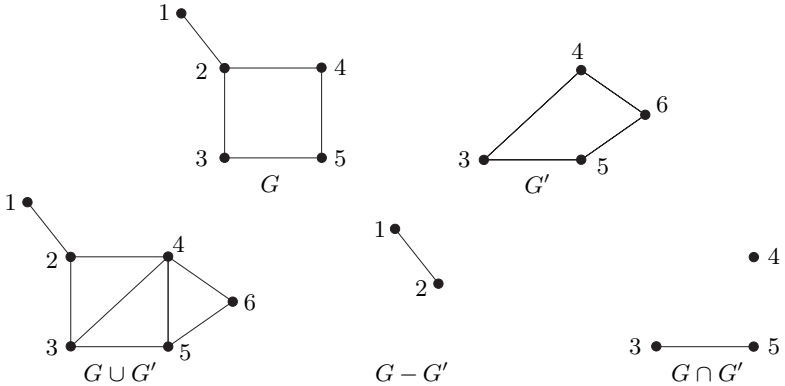


Abb. 0.1.3. Vereinigung, Differenz, Durchschnitt; die Ecken 2,3,4 spannen in  $G \cup G'$  ein Dreieck auf, nicht aber in  $G$

$G - U$

$G - H$

$G - F$

$G + F$

kanten-  
maximal

minimal  
maximal

$G * G'$

Komple-  
ment  $\overline{G}$

Kanten-  
graph  $L(G)$

Ist  $U$  eine beliebige Menge (meist eine Teilmenge von  $V$ ), so schreiben wir  $G - U$  statt  $G[V \setminus U]$ ; mit anderen Worten,  $G - U$  entsteht aus  $G$  durch *Löschen* aller Ecken in  $U \cap V$  und aller mit diesen Ecken inzidenten Kanten. Ist  $U = \{v\}$  einelementig, so schreiben wir  $G - v$  statt  $G - \{v\}$ . Ist  $H$  ein weiterer Graph, so schreiben wir statt  $G - V(H)$  kurz  $G - H$ . Ist  $F$  irgendeine Teilmenge von  $[V]^2$ , so setzen wir  $G - F := (V, E \setminus F)$  und  $G + F := (V, E \cup F)$ ; statt  $G - \{e\}$  und  $G + \{e\}$  schreiben wir  $G - e$  und  $G + e$ . Wir nennen  $G$  *kantenmaximal* mit einer gegebenen Grapheneigenschaft, wenn  $G$  selbst die Eigenschaft hat, aber kein  $G + xy$  für nicht benachbarte Ecken  $x, y \in G$  sie hat.

Sagen wir allgemeiner, ein gegebener Graph sei *minimal* oder *maximal* mit irgendeiner Eigenschaft, so meinen wir (wenn nichts anderes gesagt ist) die Minimalität oder Maximalität hinsichtlich der Teilgraphenbeziehung. Häufig werden wir auch von minimalen oder maximalen Ecken- oder Kantenmengen sprechen; hier ist die zugrundeliegende Relation natürlich einfach die Teilmengenbeziehung.

Sind  $G$  und  $G'$  disjunkt, so bezeichnet  $G * G'$  den Graphen auf  $V \cup V'$  mit der Kantenmenge  $E \cup E' \cup \{vv' \mid v \in V \text{ und } v' \in V'\}$ . Das *Komplement*  $\overline{G}$  von  $G$  ist der Graph auf  $V$ , in dem zwei Ecken genau dann benachbart sind, wenn sie es in  $G$  nicht sind. Der *Kantengraph*  $L(G)$  von  $G$  ist der Graph auf  $E$ , in dem  $x, y \in E$  genau dann als Ecken benachbart sind, wenn sie es als Kanten in  $G$  sind.

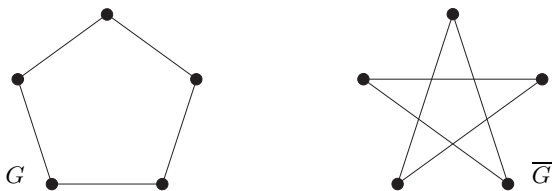


Abb. 0.1.4. Ein Graph, der zu seinem Komplement isomorph ist

## 0.2 Der Grad einer Ecke

Es sei  $G = (V, E)$  ein (nicht leerer) Graph. Die Menge der Nachbarn einer Ecke  $v$  bezeichnen wir mit  $N_G(v)$ , oder kurz mit  $N(v)$ .<sup>1</sup> Allgemeiner bezeichnet  $N(U)$  für  $U \subseteq V$  die Menge aller Nachbarn in  $V \setminus U$  von Ecken aus  $U$ .

Der *Grad* (oder die *Valenz*)  $d_G(v) = d(v)$  einer Ecke  $v$  ist die Anzahl  $|E(v)|$  der mit  $v$  inzidenten Kanten; nach unserer Definition eines Graphen<sup>2</sup> ist dies gerade die Anzahl der Nachbarn von  $v$ . Eine Ecke vom Grad 0 ist *isoliert*. Die Zahl  $\delta(G) := \min \{ d(v) \mid v \in V \}$  heißt *Minimalgrad* von  $G$ , und  $\Delta(G) := \max \{ d(v) \mid v \in V \}$  ist sein *Maximalgrad*. Hat jede Ecke von  $G$  den gleichen Grad  $k$ , so heißt  $G$  *regulär*, oder *k-regulär*. Einen 3-regulären Graphen nennt man auch *kubisch*.

Die Zahl

$$d(G) := \sum_{v \in V} d(v) / |V|$$

nennt man den *Durchschnittsgrad* von  $G$ . Offenbar gilt

$$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G).$$

Der Durchschnittsgrad misst global, was lokal durch die einzelnen Eckengrade ausgedrückt wird: die ungefähre Anzahl der Kanten von  $G$  pro Ecke. Manchmal ist es natürlich, dieses Verhältnis direkt auszudrücken; wir schreiben dazu  $\varepsilon(G) := |E|/|V|$ .

Natürlich sind die Größen  $d$  und  $\varepsilon$  lediglich zwei Seiten derselben Medaille. Zählen wir nämlich alle Eckengrade in  $G$  zusammen, so zählen wir dabei jede Kante  $vw$  genau zweimal: einmal von  $v$  und einmal von  $w$  aus. Es gilt also

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{1}{2} d(G) \cdot |V|,$$

<sup>1</sup> Auch bei anderen Bezeichnungen, die den Bezugsgraphen als Index angeben, lassen wir diesen Index häufig fort, wenn der Bezug klar ist.

<sup>2</sup> nicht jedoch bei Multigraphen; vgl. Abschnitt 0.10

und somit

$$\varepsilon(G) = \frac{1}{2}d(G).$$

[8.3.1] **Proposition 0.2.1.** *Die Anzahl der Ecken ungeraden Grades in  $G$  ist stets gerade.*

*Beweis.* Da  $|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v)$  eine ganze Zahl ist, ist  $\sum_{v \in V} d(v)$  gerade.  $\square$

Hat ein Graph einen hohen Minimalgrad, lokal betrachtet also überall viele Kanten, so hat er auch global gesehen viele Kanten (gemessen an seiner Eckenzahl):  $\varepsilon(G) = \frac{1}{2}d(G) \geq \frac{1}{2}\delta(G)$ . Umgekehrt erzwingt ein hoher Durchschnittsgrad natürlich keinen hohen Minimalgrad: auch global gesehen „dichte“ Graphen können etwa isolierte Ecken haben. Jeder Graph enthält jedoch einen Teilgraphen, dessen Durchschnittsgrad nicht kleiner ist und dessen Minimalgrad mehr als die Hälfte seines Durchschnittsgrades beträgt:

[0.4.3]  
[6.2.2] **Proposition 0.2.2.** *Jeder Graph  $G$  mit mindestens einer Kante hat einen Teilgraphen  $H$  mit  $\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$ .*

*Beweis.* Um  $H$  aus  $G$  zu konstruieren, wollen wir sukzessive Ecken geringen Grades löschen, bis nur noch Ecken hohen Grades übrig sind. Bis zu welchem Grad  $d(v)$  können wir eine Ecke  $v$  löschen, ohne dass  $\varepsilon$  sinkt? Offenbar bis höchstens  $d(v) = \varepsilon$ : dann löschen wir genau eine Ecke und mit ihr höchstens  $\varepsilon$  Kanten, d.h. das Verhältnis  $\varepsilon$  der Kantenzur Eckenzahl wird nicht sinken.

Formal konstruieren wir, ausgehend von  $G =: G_0$ , eine Folge  $G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots$  von Untergraphen von  $G$  wie folgt. Hat  $G_i$  eine Ecke  $v_i$  vom Grad  $d(v_i) \leq \varepsilon(G_i)$ , so setzen wir  $G_{i+1} := G_i - v_i$ ; hat  $G_i$  keine solche Ecke, so beenden wir die Folge mit diesem  $G_i$  und setzen  $G_i =: H$ . Nach Wahl von  $v_i$  gilt  $\varepsilon(G_{i+1}) \geq \varepsilon(G_i)$  für alle  $i$ , und damit insbesondere  $\varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$ .

Mit welchem  $G_i = H$  kann unsere Folge von Untergraphen enden? Wegen  $\varepsilon(K^1) = 0 < \varepsilon(G)$  tritt  $K^1$  nicht unter den  $G_i$  auf; insbesondere ist  $H$  also nicht leer. Dass  $H$  dennoch keine zur Definition eines weiteren Untergraphen  $G_{i+1}$  geeignete Ecke  $v_i$  enthält, impliziert somit  $\delta(H) > \varepsilon(H)$ , wie behauptet.  $\square$

## 0.3 Wege und Kreise

Ein *Weg* ist ein nicht leerer Graph  $P = (V, E)$  der Form

Weg

$$V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \quad E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\},$$

wobei die  $x_i$  paarweise verschieden sind. Die Ecken  $x_0$  und  $x_k$  sind die *Endecken* von  $P$ ; sie sind durch  $P$  *verbunden*. Die Ecken  $x_1, \dots, x_{k-1}$  sind die *inneren Ecken* von  $P$ . Ist  $P$  Teilgraph eines Graphen  $G$ , so nennen wir  $P$  einen *Weg in  $G$* . Die Anzahl der Kanten eines Weges ist seine *Länge*; den Weg der Länge  $k$  bezeichnen wir mit  $P^k$ .

Länge  
 $P^k$

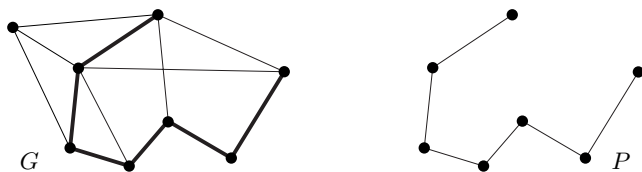


Abb. 0.3.1. Ein Weg  $P = P^6$  in  $G$

Oft bezeichnen wir einen Weg durch die natürliche Folge seiner Ecken,<sup>3</sup> schreiben also etwa  $P = x_0x_1 \dots x_k$ . Wir nennen dann  $P$  einen Weg *von  $x_0$  nach  $x_k$* , oder auch *zwischen* diesen Ecken, mit *erster* Ecke  $x_0$  und *letzter* Ecke  $x_k$ , usw.

Für  $0 \leq i \leq j \leq k$  schreiben wir

$$Px_i := x_0 \dots x_i$$

$$x_iP := x_i \dots x_k$$

$$x_iPx_j := x_i \dots x_j$$

und

$$\overset{\circ}{P} := x_1 \dots x_{k-1}$$

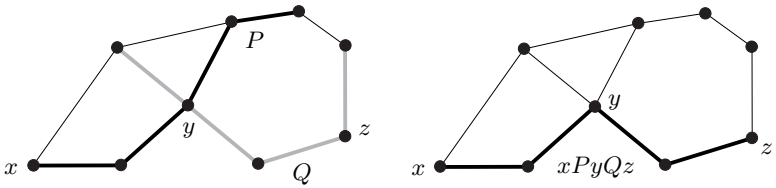
$$P\overset{\circ}{x}_i := x_0 \dots x_{i-1}$$

$$\overset{\circ}{x}_iP := x_{i+1} \dots x_k$$

$$\overset{\circ}{x}_iP\overset{\circ}{x}_j := x_{i+1} \dots x_{j-1}$$

für die entsprechenden Teilwege von  $P$ . Ähnliche offensichtliche Schreibweisen, wie etwa  $PxQyR$  statt  $Px \cup xQy \cup yR$ , verwenden wir für Wege, die aus anderen Wegen durch Aneinanderhängen gewonnen worden sind.

<sup>3</sup> Genauer, durch eine der beiden natürlichen Folgen: auch  $x_k \dots x_0$  bezeichnet den Weg  $P$ . Dennoch ist es oft nützlich, sich informell auf eine dieser beiden linearen Ordnungen von  $V(P)$  beziehen zu können, und zu deren Festlegung dient die informelle Schreibweise  $P = x_0 \dots x_k$ .

Abb. 0.3.2. Wege  $P$ ,  $Q$  und  $xPyQz$  $A$ - $B$ -Weg

Für Eckenmengen  $A, B$  nennen wir  $P$  einen  $A$ - $B$ -Weg, wenn  $V(P) \cap A = \{x_0\}$  ist und  $V(P) \cap B = \{x_k\}$ . Einen  $\{a\}$ - $B$ -Weg bezeichnen wir kürzer als  $a$ - $B$ -Weg, usw. Zwei oder mehr Wege heißen *kreuzungsfrei*, wenn keiner eine innere Ecke eines anderen enthält. Zwei  $a$ - $b$ -Wege etwa sind genau dann kreuzungsfrei, wenn sie bis auf  $a$  und  $b$  disjunkt sind.

kreuzungs-  
frei $H$ -Weg

Ist  $H$  ein Graph, so nennen wir  $P$  einen  $H$ -Weg, wenn  $P$  nicht trivial ist und den Graphen  $H$  genau in seinen Endecken  $x_0, x_k$  trifft. Ein Weg der Länge 1 mit Endecken in  $H$  gilt genau dann als  $H$ -Weg, wenn seine Kante nicht Kante von  $H$  ist.

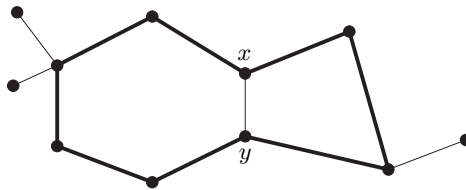
Kreis

Ist  $P = x_0 \dots x_{k-1}$  ein Weg und  $k \geq 3$ , so ist der Graph  $C := P + x_{k-1}x_0$  ein *Kreis*. Auch einen Kreis bezeichnen wir häufig kurz durch seine (zyklische) Eckenfolge, im obigen Beispiel also etwa  $C = x_0 \dots x_{k-1}x_0$ . Ist  $C$  Teilgraph eines Graphen  $G$ , so nennen wir  $C$  einen *Kreis in  $G$* . Die *Länge* eines Kreises ist wieder die Anzahl seiner Kanten, und den Kreis der Länge  $k$  bezeichnen wir mit  $C^k$ .

Länge  
 $C^k$ Tailen-  
weite  $g(G)$   
Umfang

Die Länge eines kürzesten Kreises in einem Graphen  $G$  ist die *Tailenweite*  $g(G)$  von  $G$ , die Länge eines längsten Kreises der *Umfang*. (Enthält  $G$  keinen Kreis, so habe  $G$  Tailenweite  $\infty$  und Umfang null.) Eine Kante von  $G$ , die zwei Ecken eines Kreises in  $G$  verbindet aber nicht selbst Kante des Kreises ist, ist eine *Sehne* dieses Kreises; ein Kreis in  $G$  ist also genau dann *sehenlos*, wenn er als Teilgraph in  $G$  induziert ist.

Sehne

Abb. 0.3.3. Ein  $C^8$  mit Sehne  $xy$ , und induzierte  $C^6, C^4$ 

Hat  $G$  hohen Minimalgrad, so enthält  $G$  lange Wege und Kreise (vgl. Übung 9):

[0.4.3]  
[6.2.2]

**Proposition 0.3.1.** *Jeder Graph  $G$  enthält einen Weg der Länge  $\delta(G)$  und einen Kreis der Länge mindestens  $\delta(G) + 1$  (für  $\delta(G) \geq 2$ ).*

*Beweis.* Es sei  $x_0 \dots x_k$  ein längster Weg in  $G$ . Alle Nachbarn von  $x_k$  in  $G$  liegen dann auf diesem Weg (Abb. 0.3.4). Es folgt  $k \geq d(x_k) \geq \delta(G)$ . Ist  $i < k$  minimal mit  $x_i x_k \in E(G)$ , so ist  $x_i \dots x_k x_i$  ein Kreis der Länge mindestens  $\delta(G) + 1$ .  $\square$

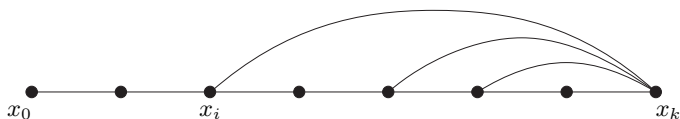


Abb. 0.3.4. Ein längster Weg  $x_0 \dots x_k$ , und die Nachbarn von  $x_k$

Minimalgrad und Taillenweite hängen (bei variabler Eckenzahl) hingegen nicht zusammen; wie wir in Kapitel 9 sehen werden, gibt es Graphen, die gleichzeitig beliebig hohen Minimalgrad und beliebig hohe Taillenweite haben.

Der *Abstand* zweier Eckenmengen  $X, Y$  in  $G$  ist die geringste Länge eines  $X$ - $Y$ -Weges in  $G$ ; existiert kein solcher Weg, so sei ihr Abstand unendlich. Den Abstand zweier einzelner Ecken  $x$  und  $y$  bezeichnen wir mit  $d_G(x, y)$ . Der größte Abstand zweier Ecken in  $G$  ist der *Durchmesser*  $\text{diam}(G)$  von  $G$ .

Abstand

$d_G(x, y)$

Durchmesser  
 $\text{diam}(G)$

Durchmesser und Taillenweite eines Graphen hängen natürlich zusammen:

**Proposition 0.3.2.** Für jeden Graphen  $G$ , der einen Kreis enthält, gilt  $g(G) \leq 2 \text{diam}(G) + 1$ .

*Beweis.* Es sei  $C$  ein kürzester Kreis in  $G$ . Ist  $g(G) \geq 2 \text{diam}(G) + 2$ , so enthält  $C$  zwei Ecken, die in  $C$  einen Abstand von mindestens  $\text{diam}(G) + 1$  haben. In  $G$  haben diese Ecken geringeren Abstand; ein kürzester Weg  $P$  zwischen ihnen liegt somit nicht in  $C$ . Folglich enthält  $P$  einen  $C$ -Weg  $xPy$ . Zusammen mit dem kürzeren der beiden  $x$ - $y$ -Wege in  $C$  ergibt  $xPy$  einen kürzeren Kreis als  $C$ , mit Widerspruch.  $\square$

Eine Ecke heißt *zentral* in  $G$ , wenn ihr größter Abstand von anderen Ecken möglichst klein ist. Dieser Abstand ist der *Radius* von  $G$ , geschrieben  $\text{rad}(G)$ ; formal ist also  $\text{rad}(G) = \min_{x \in V(G)} \max_{y \in V(G)} d_G(x, y)$ . Wie man leicht sieht (Übung), gilt

zentral

Radius  
 $\text{rad}(G)$

$$\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2 \text{rad}(G).$$

Durchmesser und Radius sind nicht mit Minimal-, Durchschnitts- oder Maximalgrad korreliert, solange wir nichts über die Ordnung des Graphen sagen. Graphen mit hohem Durchmesser und Minimalgrad haben jedoch viele Ecken (mehr als ihr Durchmesser oder Minimalgrad alleine es erzwingen; siehe Übung 10), und Graphen mit geringem Durchmesser und Maximalgrad haben wenige Ecken:



[7.4.1]  
[7.4.2]

**Proposition 0.3.3.** Ein Graph  $G$  mit Radius  $\leq k$  und Maximalgrad höchstens  $d \geq 3$  hat weniger als  $\frac{d}{d-2}(d-1)^k$  Ecken.

*Beweis.* Es sei  $z$  eine zentrale Ecke in  $G$ . Bezeichnet  $D_i$  die Menge der Ecken von  $G$  mit Abstand  $i$  von  $z$ , so ist  $V(G) = \bigcup_{i=0}^k D_i$ , und es gilt  $|D_0| = 1$  und  $|D_1| \leq d$ . Für  $i \geq 1$  gilt  $|D_{i+1}| \leq (d-1)|D_i|$ , da jede Ecke aus  $D_{i+1}$  Nachbar einer Ecke in  $D_i$  ist (warum?), und jede Ecke in  $D_i$  höchstens  $d-1$  Nachbarn in  $D_{i+1}$  hat (da sie einen weiteren Nachbarn in  $D_{i-1}$  hat). Induktiv gilt damit  $|D_{i+1}| \leq d(d-1)^i$  für alle  $i < k$ , und somit

$$|G| \leq 1 + d \sum_{i=0}^{k-1} (d-1)^i = 1 + \frac{d}{d-2} ((d-1)^k - 1) < \frac{d}{d-2} (d-1)^k. \quad \square$$

Ganz ähnlich kann man zeigen, dass Graphen mit hohem Minimalgrad und hoher Taillenweite viele Ecken haben müssen. Zu gegebenen  $d \in \mathbb{R}$  und  $g \in \mathbb{N}$  sei

$$n_0(d, g) := \begin{cases} 1 + d \sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i & \text{wenn } g =: 2r+1 \text{ ungerade ist;} \\ 2 \sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i & \text{wenn } g =: 2r \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

Durch Betrachten von Distanzklassen wie im Beweis von Proposition 0.3.3 folgt leicht, dass ein Graph mit Minimalgrad  $\delta$  und Taillenweite  $g$  mindestens  $n_0(\delta, g)$  Ecken hat (Übung 7). Wesentlich tiefer liegt der folgende Satz, nach dem man die gleiche Schranke bereits für hohen Durchschnittsgrad erhält:

**Satz 0.3.4.** (Alon, Hoory & Linial 2002)

Für jeden Graphen  $G$  mit  $d(G) \geq d \geq 2$  und  $g(G) \geq g \in \mathbb{N}$  gilt  $|G| \geq n_0(d, g)$ .

Ein Aspekt von Satz 0.3.4 ist, dass er die Existenz kurzer Kreise garantiert. Die folgende ganz allgemeine Abschätzung der Taillenweite folgt bereits aus der einfachen Minimalgradversion des Satzes (Übung 7):

[1.3.1]

**Korollar 0.3.5.** Aus  $\delta(G) \geq 3$  folgt  $g(G) < 2 \log |G|$ .

*Beweis.* Ist  $g := g(G)$  gerade, so gilt

$$n_0(3, g) = 2 \frac{2^{g/2} - 1}{2 - 1} = 2^{g/2} + (2^{g/2} - 2) > 2^{g/2};$$

ist  $g$  ungerade, so ist

$$n_0(3, g) = 1 + 3 \frac{2^{(g-1)/2} - 1}{2 - 1} = \frac{3}{\sqrt{2}} 2^{g/2} - 2 > 2^{g/2}.$$

Wegen  $|G| \geq n_0(3, g)$  folgt die Behauptung.  $\square$

Ein *Kantenzug* (der *Länge*  $k$ ) in einem Graphen  $G$  ist eine nicht leere Folge  $v_0 e_0 v_1 e_1 \dots e_{k-1} v_k$  von abwechselnd Ecken und Kanten aus  $G$  mit  $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$  für alle  $i < k$ . Ist  $v_0 = v_k$ , so heißt der Kantenzug *geschlossen*. Ein Kantenzug definiert auf natürliche Weise einen Weg in  $G$ , wenn seine Ecken  $v_i$  paarweise verschieden sind. Allgemein enthält<sup>4</sup> jeder Kantenzug zwischen zwei Ecken einen Weg zwischen diesen Ecken (Beweis?).

*Kantenzug*

## 0.4 Zusammenhang

Ein nicht leerer Graph heißt *zusammenhängend*, wenn er für je zwei seiner Ecken  $x, y$  einen  $x$ - $y$ -Weg enthält. Ist  $U \subseteq V(G)$  und  $G[U]$  zusammenhängend, so nennen wir  $U$  *zusammenhängend in*  $G$ .

*zusammenhängend*

**Proposition 0.4.1.** *Die Eckenmenge eines zusammenhängenden Graphen  $G$  besitzt stets eine Aufzählung  $(v_1, \dots, v_n)$  mit der Eigenschaft, dass  $G_i := G[v_1, \dots, v_i]$  für jedes  $i$  zusammenhängend ist.*

[0.5.2]

*Beweis.* Wähle  $v_1$  beliebig. Es seien nun  $v_1, \dots, v_i$  bereits gewählt und  $i < |G|$ . Wähle eine Ecke  $v \in G - G_i$  beliebig. Da  $G$  zusammenhängend ist, enthält  $G$  einen  $v$ - $v_1$ -Weg  $P$ . Wähle als  $v_{i+1}$  die letzte Ecke von  $P$  in  $G - G_i$ ; dann hat  $v_{i+1}$  einen Nachbarn in  $G_i$ . Dass jedes  $G_i$  zusammenhängend ist, folgt hieraus mit Induktion nach  $i$ .  $\square$

Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Die maximalen zusammenhängenden Teilgraphen von  $G$  sind seine *Komponenten*. Sie sind offensichtlich Untergraphen, und ihre Eckenmengen partitionieren  $V$ . Da zusammenhängende Graphen nicht leer sind, hat der leere Graph (aber nur dieser) keine Komponenten.

*Komponente*

Ein minimaler aufspannender Teilgraph von  $G$ , dessen Durchschnitt mit jeder Komponente von  $G$  zusammenhängend ist, heißt *Gerüst* von  $G$ .

*Gerüst*

Sind  $A, B \subseteq V$  und  $X \subseteq V \cup E$ , und enthält jeder  $A$ - $B$ -Weg in  $G$  eine Ecke oder Kante aus  $X$ , so *trennt*  $X$  die Mengen  $A$  und  $B$  in  $G$  und

*trennt*

<sup>4</sup> Für Graphen definierte Bezeichnungen verwenden wir informell gelegentlich auch für Kantenzüge, wenn ihre Bedeutung offensichtlich ist.

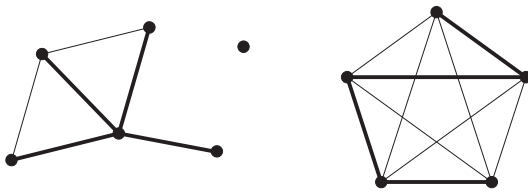


Abb. 0.4.1. Ein Graph mit drei Komponenten und Gerüst  
 $(K^1 * \overline{K^4}) \cup K^1 \cup P^4$

**Trenner** ist ein  $A$ - $B$ -Trenner; insbesondere gilt dann  $A \cap B \subseteq X$ . Die Menge  $X$  trennt zwei Ecken  $a, b$ , falls sie die Mengen  $\{a\}$  und  $\{b\}$  trennt und  $a, b \in X$  ist. Allgemeiner trennt  $X$  den Graphen  $G$ , wenn  $X$  zwei Ecken in  $G$  trennt. Eine Ecke, die zwei andere Ecken der gleichen Komponente trennt, heißt **Artikulation**. Eine Kante heißt **Brücke**, wenn sie ihre Endecken trennt; dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn sie auf keinem Kreis liegt.

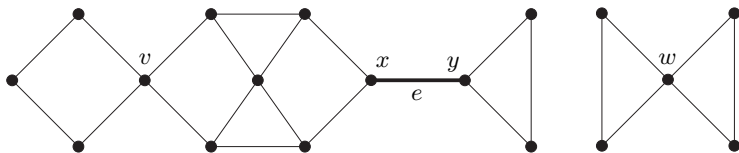


Abb. 0.4.2. Ein Graph mit Artikulationen  $v, w, x, y$  und  
 Brücke  $e = xy$

**Teilung** Das ungeordnete Paar  $\{A, B\}$  heißt *Teilung* von  $G$  mit den *Seiten*  $A$  und  $B$ , wenn  $A \cup B = V$  ist und  $G$  keine Kante zwischen  $A \setminus B$  und  $B \setminus A$  hat. Letzteres ist offensichtlich äquivalent zu der Aussage, dass  $A$  von  $B$  durch  $A \cap B$  getrennt wird. Wenn weder  $A \setminus B$  noch  $B \setminus A$  leer ist, heißt die Teilung *echt*. Die Zahl  $|A \cap B|$  ist die *Ordnung* der Teilung  $\{A, B\}$ .

**$k$ -  
zusammen-  
hängend**

$G$  heißt  $k$ -zusammenhängend (für  $k \in \mathbb{N}$ ), wenn  $|G| > k$  gilt und  $G - X$  für jede Eckenmenge  $X \subseteq V$  der Mächtigkeit  $< k$  zusammenhängend ist, also keine zwei Ecken von  $G$  durch weniger als  $k$  andere Ecken getrennt werden.

**$\kappa(G)$**

Jeder nicht leere Graph ist somit 0-zusammenhängend, und die 1-zusammenhängenden Graphen sind gerade die nicht trivialen zusammenhängenden Graphen. Die größte natürliche Zahl  $k$ , für die  $G$   $k$ -zusammenhängend ist, ist der *Zusammenhang*  $\kappa(G)$  von  $G$ . Insbesondere ist  $\kappa(G) = 0$  genau dann, wenn  $G$  nicht zusammenhängend oder ein  $K^1$  ist, und es gilt  $\kappa(K^n) = n - 1$  für alle  $n \geq 1$ .

**$\ell$ -kanten-  
zusammen-  
hängend**

Ist  $|G| > 1$ , so heißt  $G$   $\ell$ -kantenzusammenhängend, wenn  $G - F$  für jede Kantenmenge  $F \subseteq E$  der Mächtigkeit  $< \ell$  zusammenhängend ist. Das größte  $\ell \in \mathbb{N}$ , für das  $G$   $\ell$ -kantenzusammenhängend ist, ist der

*Kantenzusammenhang*  $\lambda(G)$  von  $G$ ; insbesondere ist  $\lambda(G) = 0$ , wenn  $G$  unzusammenhängend ist.

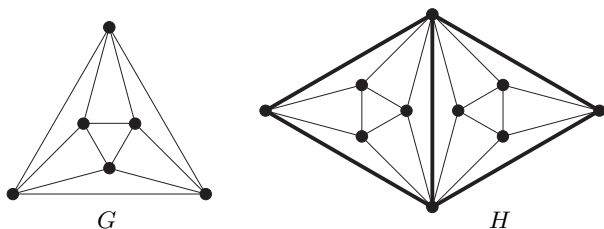
 $\lambda(G)$ 

Abb. 0.4.3. Das Oktaeder  $G$  (links) mit  $\kappa(G) = \lambda(G) = 4$ , und ein Graph  $H$  mit  $\kappa(H) = 2$  und  $\lambda(H) = 4$

Oktaeder

**Proposition 0.4.2.** Ist  $|G| \geq 2$ , so gilt  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ .

[2.2.1]

*Beweis.* Die zweite Ungleichung folgt sofort aus der Tatsache, dass die mit einer festen Ecke inzidenten Kanten stets  $G$  trennen. Zum Beweis der ersten sei  $F$  eine Menge von  $\lambda(G)$  Kanten, für die  $G - F$  unzusammenhängend ist;  $F$  existiert nach Definition von  $\lambda$  und ist ein minimaler Kantentrenner in  $G$ . Wir zeigen  $\kappa(G) \leq |F|$ .

Nehmen wir zuerst an,  $G$  habe eine Ecke  $v$ , die mit keiner Kante aus  $F$  inzidiert. Es sei  $C$  die  $v$  enthaltende Komponente von  $G - F$ . Die mit Kanten aus  $F$  inzidenten Ecken von  $C$  trennen dann  $v$  von  $G - C$ . Da  $F$  wegen seiner Minimalität keine Kante mit mehr als einer Ecke in  $C$  enthält, gibt es höchstens  $|F|$  solche Ecken; damit ist  $\kappa(G) \leq |F|$  wie gewünscht.

Betrachten wir nun den Fall, dass jede Ecke von  $G$  mit einer Kante aus  $F$  inzidiert. Es sei  $v$  eine beliebige Ecke, und  $C$  die  $v$  enthaltende Komponente von  $G - F$ . Die Nachbarn  $w$  von  $v$  mit  $vw \notin F$  liegen dann ebenfalls in  $C$ . Da sie alle nach Annahme mit Kanten aus  $F$  inzidieren, und diese wegen der Minimalität von  $F$  verschieden sind, folgt  $d_G(v) \leq |F|$ . Nun trennt aber  $N_G(v)$  die Ecke  $v$  von allen anderen Ecken in  $G$ , was  $\kappa(G) \leq d(v) \leq |F|$  impliziert – es sei denn, es gibt keine solchen anderen Ecken, d.h. es ist  $\{v\} \cup N(v) = V$ . Da  $v$  beliebig gewählt war, dürfen wir dann aber annehmen, dass  $G$  vollständig ist. Doch dann gilt  $\kappa(G) = \lambda(G) = |G| - 1$  nach Definition.  $\square$

Hoher Zusammenhang setzt also hohen Minimalgrad voraus. Umgekehrt sichert hoher Minimalgrad keinen hohen Zusammenhang, ja nicht einmal hohen Kantenzusammenhang. (Beispiele?)

Bereits aus hohem Durchschnittsgrad folgt aber die Existenz eines Teilgraphen hohen Zusammenhangs. Um einen  $k$ -zusammenhängenden Teilgraphen zu erzwingen, reicht ein Durchschnittsgrad von  $4k$ :

[6.2.3]  
[9.2.3]

**Satz 0.4.3.** (Mader 1972)

Jeder Graph  $G$  mit  $d(G) \geq 4k$ , wobei  $0 \neq k \in \mathbb{N}$  sei, hat einen  $(k+1)$ -zusammenhängenden Teilgraphen  $H$  mit  $\varepsilon(H) > \varepsilon(G) - k$ .

(0.2.2)

(0.3.1)

$\gamma$

*Beweis.* Es sei  $\gamma := \varepsilon(G) (\geq 2k)$ . Wir betrachten die Teilgraphen  $G' \subseteq G$  mit

$$|G'| \geq 2k \quad \text{und} \quad \|G'\| > \gamma(|G'| - k). \quad (*)$$

Solche Graphen  $G'$  existieren, da  $G$  selbst einer ist. Es sei  $H$  ein solches  $G'$  minimaler Ordnung; wir zeigen die Behauptung für dieses  $H$ .

Kein Graph  $G'$ , für den  $(*)$  gilt, kann die Ordnung genau  $2k$  haben, denn dies würde bedeuten, dass  $\|G'\| > \gamma k \geq 2k^2 > \binom{|G'|}{2}$  gilt. Die Minimalität von  $H$  impliziert daher  $\delta(H) > \gamma$ : andernfalls könnten wir eine Ecke des Grades höchstens  $\gamma$  löschen und erhielten einen Graphen  $G' \subsetneq H$ , der immer noch  $(*)$  erfüllte. Insbesondere ist  $|H| \geq \gamma$ . Teilen wir die Ungleichung  $\|H\| > \gamma|H| - \gamma k$  aus  $(*)$  durch  $|H|$ , so erhalten wir wie gewünscht  $\varepsilon(H) > \gamma - k$ .

$H_1, H_2$

Es bleibt  $\kappa(H) \geq k+1$  zu zeigen. Anderenfalls hat  $H$  eine echte Teilung  $\{U_1, U_2\}$  der Ordnung höchstens  $k$ ; wir setzen  $H[U_i] =: H_i$ . Da jede Ecke  $v \in U_1 \setminus U_2$  all ihre  $d(v) \geq \delta(H) > \gamma$  Nachbarn aus  $H$  in  $H_1$  hat, erhalten wir  $|H_1| \geq \gamma \geq 2k$ . Analog zeigt man  $|H_2| \geq 2k$ . Da aufgrund der Minimalität von  $H$  weder  $H_1$  noch  $H_2$  die Bedingung  $(*)$  erfüllt, ist überdies

$$\|H_i\| \leq \gamma(|H_i| - k)$$

für  $i = 1, 2$ . Aber dann gilt

$$\begin{aligned} \|H\| &\leq \|H_1\| + \|H_2\| \\ &\leq \gamma(|H_1| + |H_2| - 2k) \\ &\leq \gamma(|H| - k) \quad (\text{da } |H_1 \cap H_2| \leq k \text{ ist}), \end{aligned}$$

was der Bedingung  $(*)$  für  $H$  widerspricht.  $\square$

## 0.5 Bäume und Wälder

*Wald*  
*Baum*

Ein Graph, der keinen Kreis enthält, ist ein *Wald*. Ein zusammenhängender Wald ist ein *Baum*. (Ein Wald ist somit ein Graph, dessen Komponenten Bäume sind.) Die Ecken vom Grad 1 eines Baumes sind seine *Blätter*.<sup>5</sup> Jeder nicht triviale Baum hat ein Blatt; betrachte etwa

*Blatt*

<sup>5</sup> Ausnahme: haben wir eine Ecke des Baumes als *Wurzel* gewählt (s.u.), so gilt sie auch dann nicht als Blatt, wenn sie den Grad 1 hat.

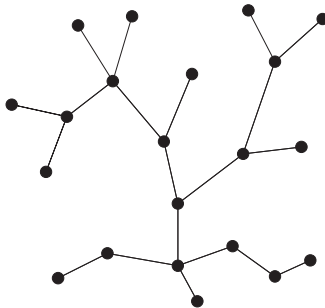


Abb. 0.5.1. Ein Baum

die Entdecken eines längsten Weges. Dies kann bei Induktionsbeweisen für Bäume nützlich sein: entfernt man von einem Baum ein Blatt, so ist der Rest immer noch ein Baum.

**Satz 0.5.1.** Die folgenden Aussagen sind äquivalent für einen Graphen  $T$ :

[0.6.1]  
[0.9.5]  
[3.2.9]

- (i)  $T$  ist ein Baum;
- (ii) Zwischen je zwei Ecken enthält  $T$  genau einen Weg;
- (iii)  $T$  ist minimal zusammenhängend, d.h.  $T$  ist zusammenhängend aber für jede Kante  $e$  von  $T$  ist  $T - e$  nicht zusammenhängend;
- (iv)  $T$  ist maximal kreislos, d.h.  $T$  ist kreislos aber für je zwei nicht benachbarte Ecken  $x, y$  enthält  $T + xy$  einen Kreis.  $\square$

Der Beweis von Satz 0.5.1 ist ganz einfach und eine gute Übung zum Umgang mit den in ihm auftretenden Begriffen. Für zwei Ecken  $x, y \in T$  bezeichnen wir (die Notation aus Abschnitt 0.3 erweiternd) mit  $xTy$  den nach Satz 0.5.1 (ii) bestimmten  $x$ - $y$ -Weg in  $T$ .

$xTy$

**Korollar 0.5.2.** Die Eckenmenge eines Baumes hat stets eine Aufzählung  $(v_1, \dots, v_n)$  mit der Eigenschaft, dass  $v_i$  für jedes  $i \geq 2$  genau einen Nachbarn in  $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$  hat.

*Beweis.* Verwende die Eckenaufzählung aus Proposition 0.4.1.  $\square$

(0.4.1)

**Korollar 0.5.3.** Ein zusammenhängender Graph mit  $n$  Ecken ist genau dann ein Baum, wenn er  $n - 1$  Kanten hat.

[0.9.5]  
[1.4.4]  
[3.2.9]

*Beweis.* Dass jeder Baum mit  $n$  Ecken  $n - 1$  Kanten hat, folgt induktiv aus Korollar 0.5.2. Ist umgekehrt  $G$  ein beliebiger zusammenhängender Graph mit  $n$  Ecken und  $n - 1$  Kanten, so betrachten wir ein Gerüst  $G'$  von  $G$ . Nach Satz 0.5.1 ist  $G'$  ein Baum und hat damit bereits selbst  $n - 1$  Kanten. Es folgt  $G = G'$ , d.h. auch  $G$  ist ein Baum.  $\square$

[7.2.1]  
[7.2.3]

**Korollar 0.5.4.** Ist  $T$  ein Baum und  $G$  ein Graph mit  $\delta(G) \geq |T| - 1$ , so gilt  $T \subseteq G$ , d.h.  $G$  hat einen zu  $T$  isomorphen Teilgraphen.

*Beweis.* Finde eine Kopie von  $T$  in  $G$  induktiv entlang einer Eckenauzfählung von  $T$  aus Korollar 0.5.2.  $\square$

Spannbaum

Ein Baum  $T \subseteq G$  heißt *Spannbaum* von  $G$ , wenn er ganz  $G$  aufspannt, d.h. wenn  $V(T) = V(G)$  ist. Ein Spannbaum ist nach Satz 0.5.1 also nichts anderes als ein Gerüst eines zusammenhängenden Graphen; insbesondere besitzt jeder zusammenhängende Graph einen Spannbaum. Ist  $T$  ein Spannbaum von  $G$ , so nennt man die Kanten aus  $E(G) \setminus E(T)$  die *Sehnen* von  $T$  in  $G$ .

Sehnen

Wurzel

Gelegentlich ist es hilfreich, eine spezielle Ecke eines Baumes besonders auszuzeichnen, indem man sie seine *Wurzel* nennt. Einen Baum mit fest gewählter Wurzel nennt man einen *Wurzelbaum*. Die Wahl einer Wurzel  $r$  aus der Eckenmenge eines Baumes  $T$  definiert eine Ordnungsrelation auf  $V(T)$ : wir schreiben  $x \leq y$ , wenn  $x \in rTy$  gilt. Wir denken uns diese zu  $T$  und  $r$  gehörige *Baumordnung* vertikal: ist  $x < y$ , so sagen wir, dass  $x$  *unter*  $y$  in  $T$  liegt, wir nennen

 $[\bar{t}], [t]$ 

$$[y] := \{x \mid x \leq y\} \quad \text{und} \quad [x] := \{y \mid y \geq x\}$$

Abschluss

den *Abschluss* von  $y$  nach unten bzw. von  $x$  nach oben, und so weiter. Die Wurzel  $r$  des Baumes  $T$  ist dann seine kleinste Ecke, die Blätter sind die maximalen Ecken, die Endecken einer Kante sind stets vergleichbar, und

Blatt

jede Eckenmenge der Form  $\{x \mid x \leq y\}$  (wobei  $y$  irgendeine feste Ecke ist) ist eine *Kette*, d.h. eine Menge paarweise vergleichbarer Elemente. (Beweise?) Die Ecken mit Abstand  $k$  von  $r$  haben die *Höhe*  $k$  und bilden die  $k$ -te *Schicht* von  $T$ .

Höhe

Schicht

Ein Wurzelbaum  $T$  in einem Graphen  $G$  heißt *normal* in  $G$ , wenn die Endecken eines jeden  $T$ -Weges in  $G$  in der Baumordnung von  $T$  vergleichbar sind. Ist  $T$  ein Spannbaum von  $G$ , so heißt dies nichts weiter, als dass zwei Ecken von  $T$  stets vergleichbar sein müssen, wenn sie in  $G$  benachbart sind (Abb. 0.5.2).

normaler Baum

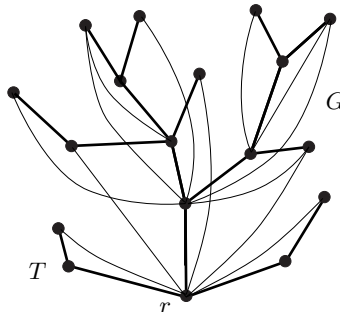


Abb. 0.5.2. Ein normaler Spannbaum mit Wurzel  $r$

Ein normaler Baum  $T$  in  $G$  kann ein mächtiges Hilfsmittel sein, um die Trennungseigenschaften von  $G$  zu beschreiben:

**Lemma 0.5.5.** *Sei  $T$  ein normaler Baum in  $G$ .*

- (i) *Je zwei Ecken  $x, y \in T$  werden in  $G$  durch die Menge  $[x] \cap [y]$  getrennt.*
- (ii) *Ist  $S \subseteq V(T) = V(G)$  nach unten abgeschlossen, so werden die Komponenten von  $G - S$  von den Mengen  $[x]$  aufgespannt, für die  $x$  in  $T - S$  minimal ist.*

*Beweis.* (i) Es sei  $P$  ein beliebiger  $x$ - $y$ -Weg in  $G$ ; wir zeigen, dass  $P$  die Menge  $[x] \cap [y]$  trifft. Dazu betrachten wir eine minimale Folge  $t_1, \dots, t_n$  in  $V(P \cap T)$  mit der Eigenschaft, dass  $t_1 = x$  und  $t_n = y$  ist und  $t_i$  und  $t_{i+1}$  in der Baumordnung von  $T$  für alle  $i$  vergleichbar sind. (Solch eine Folge existiert: die Folge *aller* Ecken von  $P$  in  $V(T)$  etwa erfüllt diese Bedingungen, da  $T$  normal ist und jedes Segment  $t_i P t_{i+1}$  entweder eine Kante von  $T$  oder ein  $T$ -Weg ist.) In unserer minimalen Folge kann es nun nicht passieren, dass  $t_{i-1} < t_i > t_{i+1}$  gilt für irgendein  $i$ : dann wären  $t_{i-1}$  und  $t_{i+1}$  vergleichbar, und durch Löschen von  $t_i$  erhielten wir eine kleinere solche Folge. Es gibt also ein  $k \in \{1, \dots, n\}$  mit

$$x = t_1 > \dots > t_k < \dots < t_n = y.$$

Da  $t_k$  in  $[x] \cap [y] \cap V(P)$  liegt, folgt die Behauptung.

(ii) Betrachten wir eine Komponente  $C$  von  $G - S$ , und in  $V(C)$  ein minimales Element  $x$ . Dann gibt es in  $V(C)$  kein weiteres minimales Element  $x'$ : da  $x$  und  $x'$  unvergleichbar wären, enthielte nach (i) jeder  $x$ - $x'$ -Weg in  $C$  eine Ecke unter beiden, im Widerspruch zu ihrer Minimalität in  $V(C)$ . Da jede Ecke von  $C$  über irgendeinem minimalen Element von  $V(C)$  liegt, liegt sie damit über  $x$ . Umgekehrt liegt aber auch jede Ecke  $y \in [x]$  in  $C$ : da  $S$  nach unten abgeschlossen ist, liegt der aufsteigende Weg  $xTy$  ja ganz in  $T - S$ . Somit gilt  $V(C) = [x]$ .

Wir zeigen nun, dass  $x$  minimal nicht nur in  $V(C)$  sondern in ganz  $T - S$  ist. Die Ecken unterhalb von  $x$  bilden eine Kette  $[t]$  in  $T$ . Da  $t$  zu  $x$  benachbart ist, folgt aus der Maximalität von  $C$  als Komponente von  $G - S$ , dass  $t$  in  $S$  liegt. Da  $S$  nach unten abgeschlossen ist, gilt dann auch  $[t] \subseteq S$ . Damit haben wir bewiesen, dass jede Komponente von  $G - S$  die behauptete Form hat.

Ist umgekehrt  $x$  irgendein minimales Element von  $T - S$ , so ist  $x$  natürlich auch minimal in der Komponente  $C$  von  $G - S$ , die es enthält. Wie oben folgt  $C = [x]$ .  $\square$

Normale Spannbäume werden in der Informatik meist *Tiefensuchbäume* genannt, weil man sie durch ein bestimmtes Suchverfahren auf



Graphen definieren und konstruieren kann (Übung 26). Ihre Existenz kann man mit einem kleinen Trick leicht durch Induktion zeigen (Übung 25), doch ist der folgende konstruktive Beweis erhellender.

[5.5.3]

**Proposition 0.5.6.** *Jeder zusammenhängende Graph enthält einen normalen Spannbaum, mit beliebig vorgegebener Ecke als Wurzel.*

*Beweis.* Es sei  $G$  ein zusammenhängender Graph,  $r \in G$  eine beliebige Ecke, und  $T \subseteq G$  ein maximaler in  $G$  normaler Baum mit Wurzel  $r$ . Wir zeigen, dass  $T$  alle Ecken von  $G$  enthält.

Wenn nicht, so betrachten wir eine Komponente  $C$  von  $G - T$ . Da  $T$  in  $G$  normal ist, bildet  $N(C)$  eine Kette in  $T$ ; deren größtes Element heiße  $x$ . Wir erweitern nun  $T$  zu einem Baum  $T'$ , indem wir einen Nachbarn  $y \in C$  von  $x$  hinzufügen und mit  $x$  verbinden. Die von  $T'$  auf  $V(T)$  induzierte Baumordnung stimmt dann mit der Baumordnung von  $T$  selbst überein. Um einen Widerspruch zur Maximalwahl von  $T$  herzuleiten, zeigen wir jetzt, dass auch  $T'$  in  $G$  normal ist.

Sei dazu  $P$  ein  $T'$ -Weg in  $G$ . Liegen beide Endecken von  $P$  in  $T$ , so sind sie in der Baumordnung von  $T$  (und somit in der von  $T'$ ) vergleichbar;  $P$  ist ja dann auch ein  $T$ -Weg, und  $T$  ist nach Annahme normal in  $G$ . Liegen nicht beide Endecken von  $P$  in  $T$ , so ist  $y$  eine davon, und bis auf seine andere Endecke  $z$  liegt  $P$  ganz in  $C$ . Die Ecke  $z$  liegt dann in  $N(C)$ , und es gilt  $z \leq x$  nach Wahl von  $x$ . Für unseren Nachweis der Vergleichbarkeit von  $y$  und  $z$  reicht es somit zu zeigen, dass  $x < y$  ist. Nach Definition der Baumordnung von  $T'$  ist dies gleichbedeutend mit  $x \in rT'y$ , was schon deshalb gilt, weil  $x$  der einzige Nachbar von  $y$  in  $T'$  ist.  $\square$

## 0.6 Bipartite Graphen

 $r$ -partit

Es sei  $r \geq 2$  eine natürliche Zahl. Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt  $r$ -partit, wenn eine Partition von  $V$  in  $r$  Teile existiert, so dass die Endecken einer jeden Kante von  $G$  in verschiedenen Partitionsklassen liegen: Ecken aus der gleichen Klasse dürfen nicht benachbart sein. Ein 2-partiter Graph heißt auch *bipartit* (oder *paar*).

bipartit

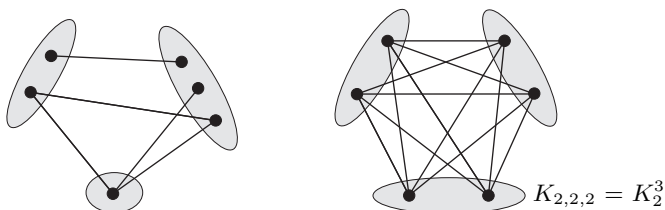


Abb. 0.6.1. Zwei 3-partite Graphen

Ist  $G$  ein  $r$ -partiter Graph, in dem je zwei Ecken aus verschiedenen Klassen benachbart sind, so heißt  $G$  *vollständig  $r$ -partit* (bzw. *vollständig bipartit*), oder allgemeiner *vollständig multipartit*. Sind  $n_1, \dots, n_r$  die Mächtigkeiten seiner  $r$  Partitionsklassen, so bezeichnen wir diesen (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten) Graphen  $\overline{K^{n_1}} * \dots * \overline{K^{n_r}}$  mit  $K_{n_1, \dots, n_r}$ . Ist  $n_1 = \dots = n_r = s$ , so bezeichnen wir den Graphen auch mit  $K_s^r$ ; dies ist also der vollständig  $r$ -partite Graph, in dem jede Partitionsklasse genau  $s$  Ecken enthält.<sup>6</sup> (Abb. 0.6.1 zeigt als Beispiel das Oktaeder  $K_2^3$ ; vergleiche diese Darstellung mit der aus Abb. 0.4.3!) Graphen der Form  $K_{1,n}$  nennt man *Sterne*; die Ecke der einelementigen Partitionsklasse dieses  $K_{1,n}$  ist das *Zentrum* des Sterns.

vollständig multipartit

$K_{n_1, \dots, n_r}$   
 $K_s^r$

Stern  
Zentrum

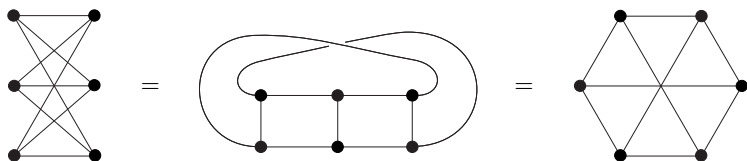


Abb. 0.6.2. Drei Darstellungen des bipartiten Graphen  $K_{3,3} = K_3^2$

Offenbar kann ein bipartiter Graph keinen Kreis ungerader Länge enthalten. Diese Eigenschaft charakterisiert die bipartiten Graphen sogar:

**Proposition 0.6.1.** *Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.*

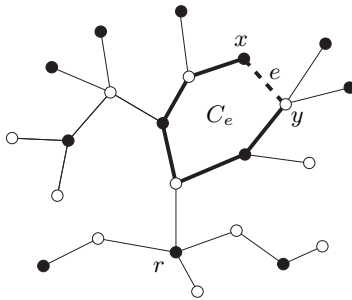
[0.9.4]  
[4.3.1]  
[5.4.2]

*Beweis.* Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph ohne Kreise ungerader Länge; wir zeigen, dass  $G$  bipartit ist. Da ein Graph bipartit ist, wenn all seine Komponenten es sind, dürfen wir  $G$  als zusammenhängend voraussetzen. Es sei  $T \subseteq G$  ein Spannbaum,  $r$  dessen Wurzel, und  $\leq_T$  die entsprechende Baumordnung auf  $V$ . Für jedes  $v \in V$  hat der eindeutig bestimmte Weg  $rTv$  gerade oder ungerade Länge; dies definiert eine Partition von  $V$  in zwei Teile. Wir zeigen, dass diese Partition  $G$  als bipartit erweist.

(0.5.1)

Es sei  $e = xy$  eine beliebige Kante von  $G$ . Ist  $e \in T$ , etwa mit  $x <_T y$ , so gilt  $rTy = rTxy$ , und  $x, y$  liegen in verschiedenen Partitionsklassen. Ist andererseits  $e \notin T$ , so ist  $C_e := xTy + e$  ein Kreis (Abb. 0.6.3), und nach dem bereits behandelten Fall liegen die Ecken des Weges  $xTy$  abwechselnd in den beiden Partitionsklassen. Da  $C_e$  nach Annahme gerade Länge hat, liegen wiederum auch  $x, y$  in verschiedenen Klassen.  $\square$

<sup>6</sup> Umgekehrt entsteht jeder  $K_s^r$  aus einem  $K^r$  durch Aufblähung von dessen Ecken zu unabhängigen  $s$ -Mengen; diese Beziehung soll in der Notation  $K_s^r$  anklingen.

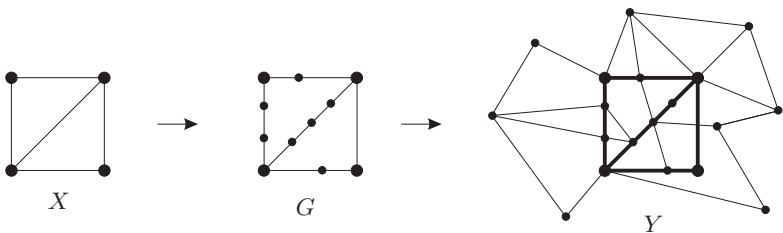
Abb. 0.6.3. Der Kreis  $C_e$  in  $T+e$ 

## 0.7 Minoren und Kontraktion

In Abschnitt 0.1 haben wir zwei grundlegende Relationen des Enthaltenseins zwischen Graphen kennengelernt: die Teilgraphen- und die Untergraphenrelation. In diesem Abschnitt lernen wir zwei weitere kennen: die topologische Minorenrelation und die (gewöhnliche) Minorenrelation. Sei  $X$  irgendein Graph, fest gewählt.

Anschaulich entsteht eine *Unterteilung* von  $X$  durch das Einzeichnen neuer Ecken auf schon bestehenden Kanten. Etwas formaler: wir ersetzen Kanten von  $X$  durch (neue) Wege zwischen ihren Endecken, wobei diese Wege keine inneren Ecken in  $V(X)$  oder auf anderen neuen Wegen haben dürfen. Ist  $G$  eine Unterteilung von  $X$ , so sagen wir,  $G$  sei *ein TX*.<sup>7</sup> Die Ecken aus  $X$  sind die *Verzweigungsecken dieses TX*, die inneren Ecken der neuen Wege seine *Unterteilungsecken*. Während Unterteilungsecken stets den Grad 2 haben, erben die Verzweigungsecken ihren Grad aus  $X$ .

Enthält ein Graph  $Y$  einen  $TX$  als Teilgraphen, so ist  $X$  ein *topologischer Minor* von  $Y$  (Abb. 0.7.1).

Abb. 0.7.1. Der Graph  $G$  ist ein  $TX$ , eine *Unterteilung* von  $X$ .

Wegen  $G \subseteq Y$  ist  $X$  damit *topologischer Minor* von  $Y$ .

<sup>7</sup> „ $T$ “ steht für „topologisch“. Obwohl formal  $TX$  eine ganze Klasse von Graphen ist, die Klasse aller Unterteilungen von  $X$ , verwenden wir den Ausdruck wie angedeutet für einzelne Elemente dieser Klasse.

In ähnlicher Weise liefert die Ersetzung der Ecken  $x$  von  $X$  durch disjunkte zusammenhängende Graphen  $G_x$ , sowie der Kanten  $xy$  von  $X$  durch nicht leere Mengen von  $G_x - G_y$ -Kanten, einen Graphen, den wir einen  $IX$  nennen.<sup>8</sup> Formal: Ein Graph  $G$  ist ein  $IX$ , wenn seine Eckenmenge eine Partition  $\{V_x \mid x \in V(X)\}$  in zusammenhängende Mengen  $V_x$  erlaubt, so dass verschiedene Ecken  $x, y \in X$  genau dann in  $X$  benachbart sind, wenn  $G$  eine  $V_x - V_y$ -Kante enthält. Die  $V_x$  sind die *Verzweigungsmengen des  $IX$* . Umgekehrt nennen wir  $X$  einen *Kontraktionsminor* von  $G$ , entstanden durch *Kontraktion* der Teilgraphen  $G_x$ .

$IX$

Verzweigungs-  
mengen

Kontraktion

Minor,  $\preceq$   
Modell

Enthält ein Graph  $Y$  einen  $IX$  als Teilgraphen, so ist  $X$  ein *Minor* von  $Y$ , der  $IX$  ist ein *Modell von  $X$*  in  $Y$ , und wir schreiben  $X \preceq Y$  (Abb. 0.7.2). Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn es eine surjektive Abbildung  $\varphi$  von einer Teilmenge von  $V(Y)$  auf  $V(X)$  gibt, für die jedes Urbild  $\varphi^{-1}(x)$  einer Ecke  $x \in X$  in  $Y$  zusammenhängend ist, und so dass es für jede Kante  $xx' \in X$  eine Kante in  $Y$  gibt zwischen den (Verzweigungs-) Mengen  $\varphi^{-1}(x)$  und  $\varphi^{-1}(x')$ .

Da Verzweigungsmengen einelementig sein dürfen, ist jeder Teilgraph eines Graphen zugleich sein Minor. In unendlichen Graphen dürfen Verzweigungsmengen unendlich sein.

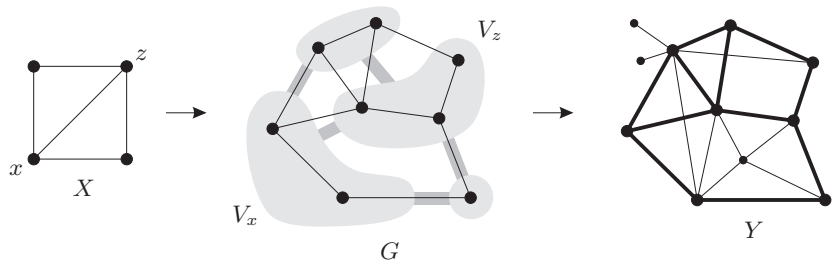


Abb. 0.7.2. Der Graph  $G$  ist ein Modell von  $X$  in  $Y$ . Damit ist  $X$  ein *Minor* von  $Y$ .

**Proposition 0.7.1.** Die Minorenrelation  $\preceq$  und die topologische Minorenrelation sind Ordnungsrelationen auf der Klasse der endlichen Graphen, das heißt sie sind reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.  $\square$

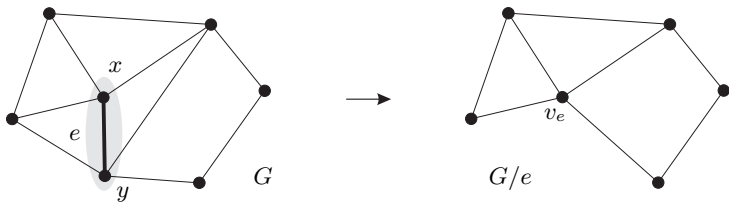
[10.6.1]

Ist  $G$  ein  $IX$ , so ist  $P = \{V_x \mid x \in X\}$  eine Partition von  $V(G)$ , und wir schreiben  $X =: G/P$  für diesen Kontraktionsminor von  $G$ . Ist  $U = V_x$  die einzige Verzweigungsmenge mit mehr als einer Ecke, so schreiben wir  $X =: G/U$  und bezeichnen die aus  $U$  kontrahierte Ecke  $x$  mit  $v_U$ . Den Graphen  $(G/U) - v_U$  fassen wir als Untergraphen von  $G$  auf. Besteht  $U$

$G/P$

$G/U$

<sup>8</sup> „ $I$ “ steht für „inflated“, also „aufgeblasen“. Wie zuvor ist  $IX$  eigentlich eine Klasse von Graphen, doch verwenden wir den Ausdruck wiederum für einzelne Elemente dieser Klasse, in der angedeuteten Sprechweise.

Abb. 0.7.3. Kontraktion der Kante  $e = xy$ 

aus genau zwei Ecken, so bilden diese eine Kante  $e = U$ ; wir sagen dann,  $X = G/e$  entstehe aus  $G$  durch *Kontraktion der Kante  $e$*  (Abb. 0.7.3).

Da die Minorenrelation transitiv ist, führt jede Folge von Löschungen oder Kontraktionen einzelner Ecken oder Kanten auf einen Minor. Umgekehrt kann man jeden Minor eines endlichen Graphen schrittweise so gewinnen:

**Korollar 0.7.2.** Ein Graph  $X$  ist genau dann Minor eines Graphen  $Y$ , wenn es Graphen  $G_0, \dots, G_n$  gibt mit  $G_0 = Y$  und  $G_n = X$ , so dass jedes  $G_{i+1}$  aus  $G_i$  durch Löschen einer Ecke, Löschen einer Kante, oder Kontraktion einer Kante entsteht.

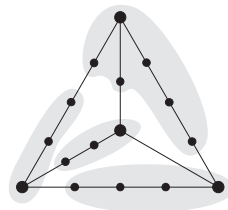
*Beweis.* Induktion nach  $|Y| + \|Y\|$ . □

Zwischen Minoren und topologischen Minoren gibt es die folgenden Beziehungen:

[3.4.2]  
[6.3.1]

**Proposition 0.7.3.**

- (i) Jeder  $TX$  ist auch ein  $IX$  (Abb. 0.7.4); jeder topologische Minor eines Graphen ist somit auch sein (gewöhnlicher) Minor.
- (ii) Ist  $\Delta(X) \leq 3$ , so enthält jeder  $IX$  einen  $TX$ ; jeder Minor mit Maximalgrad  $\leq 3$  eines Graphen ist somit auch sein topologischer Minor. □

Abb. 0.7.4. Ein  $TK^4$  aufgefasst als  $IK^4$ 

Nachdem wir nun die vier wichtigsten Relationen zwischen Graphen kennengelernt haben, können wir einen davon abhängigen weiteren Begriff einführen: den der *Einbettung* eines Graphen  $G$  in einen anderen