MARTIN PREDOTA

Prämienkalkulation in der Lebensversicherung

Übungsbuch
mit Musterlösungen

AVM

Prämienkalkulation in der Lebensversicherung

Martin Predota

Prämienkalkulation in der Lebensversicherung

Einführung mit Beispielen aus der Praxis

AVM

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

AVM – Akademische Verlagsgemeinschaft München 2010

e-ISBN (ePDF) 978-3-96091-126-5
ISBN (Print) 978-3-86924-722-9

Verlagsverzeichnis schickt gern:
AVM – Akademische Verlagsgemeinschaft München
Schwanthalerstr. 81
D-80336 München

www.avm-verlag.de

Vorwort

Eine der wichtigsten Aufgaben in einer Lebensversicherung ist die Kalkulation der Prämien und der Deckungsrückstellung. Das dafür benötigte versicherungsmathematische Know-How wird im vorliegenden Buch anhand einer elementaren Einführung dargestellt. Es wird dabei stets darauf geachtet, dass die dargestellten Methoden für die Praxis in einem Versicherungsunternehmen anwendbar sind. Die angeführten versicherungsmathematischen Methoden werden derzeit vor allem in Deutschland, in Österreich, in der Schweiz und in Liechtenstein in dieser Form verwendet, für die gerechneten Beispiele werden hauptsächlich die österreichischen Rechnungsgrundlagen eingesetzt. Die Beispiele sind aber auch in den anderen angeführten Ländern analog zu lösen. Da die Rechnungsgrundlagen in Österreich und Deutschland sehr ähnlich sind, gibt es bei den Beispielen keine großen Abweichungen bei Verwendung deutscher Rechnungsgrundlagen. Dies wird in einigen Beispielen demonstriert. Weiters werden die derzeitigen gesetzlichen Bestimmungen aus Österreich angeführt. In Deutschland, der Schweiz und in Liechtenstein sind diese größtenteils annähernd gleich, es wird jeweils auf entsprechende Quellen verwiesen.

Das Buch wendet sich einerseits an Studierende an Universitäten und Fachhochschulen, die sowohl eine praktische (insbesondere mit vielen Beispielen untermauerte) als auch eine theoretische Einführung in die Thematik suchen, andererseits an Personen in Versicherungsunternehmen als Nachschlagewerk oder im einen oder anderen Punkt zur Vertiefung und Wiederholung. Das Buch ist so aufgebaut, dass es ohne einschlägige Vorkenntnisse verstanden werden kann, es genügt ein einfaches mathematisches Grundverständnis.

Am Ende der Lektüre dieses Buchs sollte der Leser ein Verständnis für die Tarifkalkulation von Lebensversicherungsunternehmen entwickelt haben, sodass die Differenzierung bspw. nach Alter oder Geschlecht ebenso nachvollziehbar ist wie die Notwendigkeit der Verrechnung von Kosten und Sicherheitszuschlägen bei Versicherungsprämien. Weiters ist es ein Ziel des Buches, die Kalkulation der Deckungsrückstellung und der Gewinnbeteiligung zu vermitteln.

Das Buch gliedert sich in drei große Abschnitte, eine Einführung, der Prämienberechnung sowie der Berechnung der Deckungsrückstellung.

Im Einführungsteil werden die benötigten Grundlagen aus der Zins- und Wahrscheinlichkeitsrechnung ausführlich und mit Beispielen untermauert dargestellt. Hinzu kommt eine Erläuterung der wesentlichen gesetzlichen Bestimmungen, die für die Berechnung der Prämien und Deckungsrückstellung maßgeblich sind.

Im Abschnitt Prämienberechnung werden nach einem kurzen historischen Abriss zunächst die Rechnungsgrundlagen (Rechnungszins, Sterbe- und Rententafel, Kosten) ausführlich erläutert. Insbesondere wird in diesem Abschnitt auf die Unterschiede von Sterbe- und Rententafeln eingegangen. Es folgt die eigentliche Prämienberechnung, zunächst die Nettoeinmalprämien, danach die Nettojahresprämien und schließlich die Bruttoprämien. Die Berechnungen erfolgen alle auf ein Leben, es wird bewusst auf einen Abschnitt über Versicherungen auf mehrere Leben verzichtet, da dies in der Praxis viel seltener anzutreffen ist.

Nach dieser ausführlichen Betrachtung der Prämienkalkulation behandelt der nächste Abschnitt die Berechnung der Deckungsrückstellung, zunächst die Nettodeckungsrückstellung und danach die Bruttodeckungsrückstellung. Es folgt ein Kapitel, in dem Rekursionsformeln für die Deckungsrückstellung hergeleitet werden. Abschließend werden Vertragsänderungen, die in der Praxis häufig vorkommen, und die Gewinnbeteiligung behandelt.

Damit den Lesern eine Kontrolle des Erlernten ermöglicht wird, befinden sich am Ende der meisten Kapitel Übungsaufgaben in unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden.

Im Anhang finden sich die österreichischen Rechnungsgrundlagen (Sterbetafel 2000/2002, Rententafel AVÖ 2005R mit Altersverschiebung) und die zugehörigen Kommutationszahlen, sowie die Auszüge aus den zitierten Gesetzestexten.

Für Tipps aus der Praxis, Korrekturen und Anregungen zum Manuskript bedanke ich mich bei Martin Gartner, Jürgen Hartinger, Reinhold Kainhofer und Günther Sieghartsleitner. Besonderer Dank gilt meiner Frau Gudrun für die Unterstützung und ihre Geduld bei der Erstellung des Buches.

Wien, Februar 2010 Martin Predota

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Grundlagen

Kapitel 1

Zinsrechnung

1.1 Einleitung

Der Zins spielt in der Versicherungsmathematik eine große Rolle, daher werden wir zunächst einige Grundlagen zur Zins- und Rentenrechnung betrachten. Das Wort *Zins* stammt vom Lateinischen *census* und bedeutet *Abgabe*. Unter Zins verstehen wir im Folgenden das Entgelt, das für die Überlassung von Geld zu bezahlen ist. In diesem Buch gehen wir, sofern nicht etwas anderes angeführt ist, von einer flachen Zinskurve aus, d.h. die Zinsen sind von der Bindungsdauer unabhängig und jeweils gleich hoch. Falls die Zinsen für höhere Laufzeiten höher sind als jene für niedrige Laufzeiten, spricht man von einer normalen, im umgekehrten Fall von einer inversen Zinskurve (siehe Abbildung 1.1).

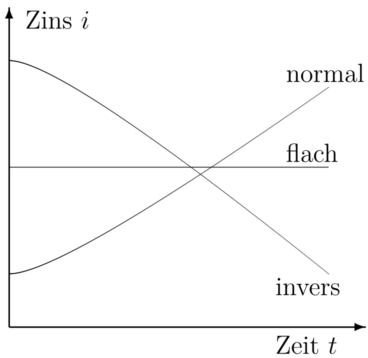

Abbildung 1.1: Normale, flache und inverse Zinskurve

In der Zinsrechnung unterscheidet man zwischen diskreter Verzinsung, falls die Zinsen zu bestimmten festgelegten (diskreten) Zeitpunkten fällig sind, und stetiger (kontinuierlicher) Verzinsung, falls die Zinsperioden durch Grenzwertbestimmung unendlich klein werden. Wir befassen uns, wie in der Versicherungspraxis üblich, ausschließlich mit diskreter Verzinsung. Für eine Einführung in stetige Verzinsung sei bspw. auf Albrecher et al. [8] verwiesen.

In diesem Zusammenhang verwenden wir folgende Bezeichnungen: Der Zinssatz (Zinsrate) i sind jene Zinsen, die in einem Jahr auf ein Kapital 1 gezahlt werden, wobei sich Kapitaländerung auf das Anfangskapital bezieht. Mit $r = 1+i$ bezeichnen wir den Aufzinsungsfaktor. Daraus ergibt sich mit $v = \frac{1}{r}$ der Abzinsungs- bzw. Diskontierungsfaktor und mit $d = 1 - v$ die Diskontrate, also die Kapitalveränderung pro Jahr bezogen auf das Endkapital. Schließlich sei noch K_t das Kapital zum Zeitpunkt t, wobei der Zeitpunkt t (in Jahren) durch $t = n + \frac{k}{m}$ mit dem ganzzahligen Anteil n gegeben ist. Dabei betrachten wir folgende Perioden pro Jahr: $m = 1$ (jährlich), $m = 2$ (halbjährlich), $m = 4$ (vierteljährlich), $m = 12$ (monatlich) und $m = 360$ (täglich). Weiters bezeichnet k die Anzahl der unterjährigen Perioden.[1] Für das Ausborgen des Kapitals K_0 für ein Jahr fallen somit Zinsen in der Höhe von $i \cdot K_0$ an.

Beispiel 1.1 *Gegeben sei ein Zinssatz $i = 0{,}05$. Dann resultieren daraus ein Aufzinsungsfaktor von*

$$r = 1 + 0{,}05 = 1{,}05,$$

ein Abzinsungsfaktor von

$$v = \frac{1}{1{,}05} \approx 0{,}9523$$

und eine Diskontrate von

$$d \approx 1 - 0{,}9523 \approx 0{,}0476.$$

Nun können wir einige Zusammenhänge zwischen den oben getroffenen Definitionen herleiten:

$$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{1+i} \tag{1.1}$$

$$d = 1 - v = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{1+i}{1+i} - \frac{1}{1+i} = \frac{1+i-1}{1+i} = \frac{i}{1+i} \tag{1.2}$$

$$d = \frac{i}{1+i} = i \cdot \frac{1}{1+i} = i \cdot v \tag{1.3}$$

$$dr = \frac{i}{1+i} \cdot (1+i) = i \cdot \frac{(1+i)}{(1+i)} = i \tag{1.4}$$

$$\frac{v}{1-v} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+i}} = \frac{1}{1+i-1} = \frac{1}{i} \tag{1.5}$$

[1] Für $m = 1$ gilt $k = 0$.

1.2 Barwert und Endwert

Wenn wir Zahlungen betrachten, so können diese zeitlich in die Zukunft oder in die Vergangenheit transformiert werden. Bei einer Transformation in die Zukunft sprechen wir von Aufzinsung, andernfalls von Abzinsung.

In Abbildung 1.2 kann man den Einfluss verschiedener Laufzeiten und verschiedener Zinssätze auf das Auf- bzw. Abzinsen eines Betrages von € 1.000,00 erkennen.

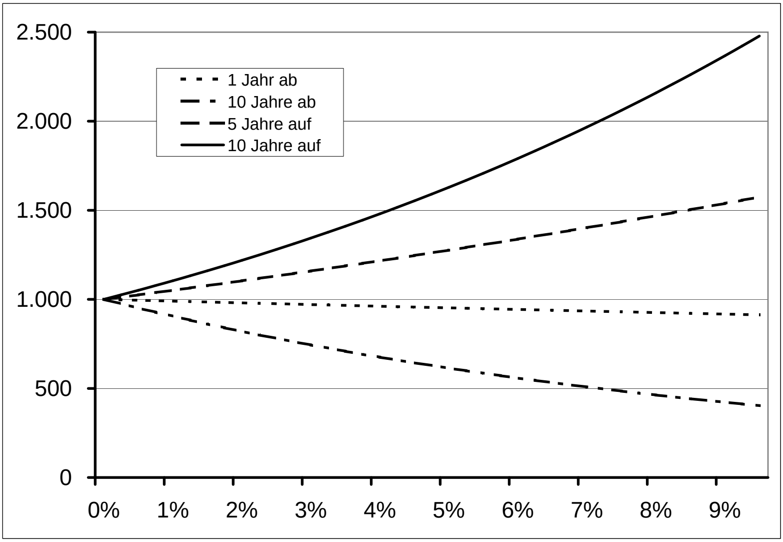

Abbildung 1.2: Auswirkung von Zinssatz und Laufzeit beim Auf- und Abzinsen

Mithilfe der Auf- bzw. Abzinsung können wir Zahlungen, die zu verschiedenen Terminen fällig sind, miteinander vergleichen. Zwei Zahlungen heißen äquivalent, wenn sie auf einen Zeitpunkt auf- bzw. abgezinst den selben Wert ergeben. Betrachten wir dazu ein Beispiel.

Beispiel 1.2 *Bei einem Marktzinssatz von 5% p.a. sind € 100,00 zum Zeitpunkt* $t = 0$ *und € 105,00 zum Zeitpunkt* $t = 1$ *äquivalent, da*

$$100 \cdot 1{,}05 = 105$$

gilt.

Je nach Vereinbarung sind Zinszahlungen am Anfang oder am Ende einer Zahlungsperiode fällig. Im ersten Fall spricht man von vorschüssiger und im zweiten Fall von nachschüssiger Verzinsung.

Betrachten wir das Startkapital K_0, dann ergeben sich daraus wie bereits erwähnt die Zinsen für eine Periode in der Höhe von $i \cdot K_0$. Für das Endkapital EW_1 am Ende der Periode resultiert somit

$$EW_1 = K_0 + i \cdot K_0 = (1+i) \cdot K_0 = r \cdot K_0.$$

Umgekehrt kann man den Wert der Zahlungen zu Beginn der Periode, den Barwert BW, bestimmen:

$$BW = K_0 = \frac{1}{r} \cdot EW_1 = \frac{1}{1+i} \cdot EW_1 = v \cdot EW_1$$

Im Folgenden bezeichnen wir mit Barwertfaktor den Barwert einer Zahlung der Höhe 1. Um auf den Barwert einer Zahlung der Höhe K zu kommen, ist dann der Barwertfaktor mit K zu multiplizieren, d.h.

$$\text{Barwert} = K \cdot \text{Barwertfaktor}.$$

Bisher sind wir von einer Periodenlänge von einem Jahr ausgegangen. Betrachten wir den Endwert nach n ganzen Jahren, so erhalten wir die Leibnizsche Zinseszinsformel

$$EW_n = \underbrace{(1+i) \cdots (1+i)}_{n \text{ Mal}} \cdot K_0 = (1+i)^n \cdot K_0.$$

Ist also ein Endzeitpunkt festgelegt, so ist der Endwert die Summe aller auf diesen Endzeitpunkt aufgezinsten Zahlungen.

Beispiel 1.3 *Ein Kapital von € 100.000,00 wird bei einem Zinsfuß von 5% nachschüssig verzinst. Wir erhalten durch Einsetzen für den Endwert nach 4 Jahren*

$$EW_4 = 100.000 \cdot 1{,}05^4 = 121.550{,}63.$$

Analog lässt sich der Endwert berechnen, wenn die Periode unterjährig ist. Für eine Laufzeit von 4,5 Jahren resultiert für den Endwert

$$EW_{4,5} = 100.000 \cdot 1{,}05^{4,5} = 124.552{,}33.$$

Nun wollen wir den Fall betrachten, dass es während der Laufzeit zu Zuzahlungen kommt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde das Kapital K_0 angelegt, zu den Zeitpunkten $k = 1, \ldots, n$ werde jeweils der Betrag c_k zugezahlt. Dann resultiert für den

Endwert nach n Jahren

$$EW_n = (1+i)^n \cdot K_0 + \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{n-k} \cdot c_k.$$

Der Barwert ist gegeben durch

$$BW = K_0 + \sum_{k=1}^{n} v^k \cdot c_k = K_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^k} \cdot c_k.$$

Der Barwert ist also die Summe aller auf den Vertragsbeginn abgezinsten Zahlungen.

Beispiel 1.4 *Ein Kapital von € 100.000,00 wird zum Zeitpunkt $t = 0$ angelegt, zu den Zeitpunkten $t = 1$ und $t = 2$ werden jeweils € 50.000,00 zugezahlt. Der Zinsfuß beträgt 4%. Für den Endwert zu $t = 2$ erhalten wir*

$$EW_2 = 100.000 \cdot 1{,}04^2 + 50.000 \cdot 1{,}04^1 + 50.000 = 210.160{,}00.$$

Der Barwert errechnet sich als

$$BW = 100.000 + 50.000 \cdot \frac{1}{1{,}04^1} + 50.000 \cdot \frac{1}{1{,}04^2} = 194.304{,}73.$$

In der Praxis kommt beinahe ausschließlich die nachschüssige Verzinsung zu Anwendung, daher sei für Ausführungen zur vorschüssigen Verzinsung bspw. auf Tietze [44] verwiesen.

1.3 Rentenrechnung

Bisher haben wir uns mit einmaligen Zahlungen beschäftigt, nun wenden wir unser Interesse periodischen Zahlungen zu, die ausschließlich vom Zinssatz und der Laufzeit abhängen, so genannten Renten. Eine Rente ist eine in regelmäßigen Zeitabständen, der Rentenperiode, wiederkehrende Zahlung, die einzelnen Zahlungen der Höhe R werden als Raten bezeichnet.

Renten kann man nach verschiedenen Kriterien unterscheiden, nach der Laufzeit, nach dem Zeitpunkt der Ratenfälligkeit oder nach dem Beginn der ersten Rentenperiode.Eine Kategorisierung nach der Laufzeit ergibt die Zeitrente, die Leibrente und die ewige Rente. Eine Zeitrente ist charakterisiert durch eine zu Beginn festgelegte Zahlungsdauer und Zahlungshöhe. Im Unterschied dazu hängt die Laufzeit einer Leibrente vom Leben einer oder mehrerer Personen ab. Eine ewige Rente ist eine Spezialform einer Zeitrente und weist eine unendliche Laufzeit auf. Unterscheidet man nach dem Zeitpunkt der Ratenfälligkeit, so kommen wir auf vor-

	Fälligkeit	Rentenhöhe	Barwert	Barwertfaktor
1. Zahlung	0	R	R	1
2. Zahlung	1	R	$v \cdot R$	v
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n-te Zahlung	$n-1$	R	$v^{n-1} \cdot R$	v^{n-1}

Tabelle 1.1: Zahlungsströme einer temporären, vorschüssigen Zeitrente (siehe Führer & Grimmer [19])

	Fälligkeit	Rentenhöhe	Barwert	Barwertfaktor
1. Zahlung	1	R	$v \cdot R$	v
2. Zahlung	2	R	$v^2 \cdot R$	v^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n-te Zahlung	n	R	$v^n \cdot R$	v^n

Tabelle 1.2: Zahlungsströme einer temporären, nachschüssigen Zeitrente

und nachschüssige Renten. Bei der vorschüssigen Rente sind die Raten jeweils am Beginn einer Periode fällig, bei der nachschüssigen am Ende der Periode.[2] Wenn man den Beginn der ersten Rentenperiode betrachtet, so kann man zwischen einer sofort beginnenden Rente und einer aufgeschobenen, also erst zu einem späteren Zeitpunkt fällig werdenden Rente, unterscheiden.

Nun berechnen wir den Barwert von Zeitrenten. Hilfreich dazu ist ein Blick auf die Tabellen 1.1 und 1.2, in denen die Barwerte und die Barwertfaktoren der einzelnen Raten dargestellt sind. Addieren wir diese einzelnen Barwertfaktoren der Zahlungsströme, dann resultieren die Barwertfaktoren der Renten. Wenden wir dann noch die Summenformel für die geometrische Reihe[3]

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q} \tag{1.6}$$

für ein beliebiges q an, dann resultieren für den Barwertfaktor der sofort beginnenden, vorschüssigen Zeitrente

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d}$$

und für den Barwertfaktor der um m Jahre aufgeschobenen, vorschüssigen Zeitrente

$$_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^m + v^{m+1} + v^{m+2} + \ldots + v^{n+m-1} = v^m \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}.$$

[2] Es ist zu beachten, dass vorschüssige bzw. nachschüssige Zinsen und vorschüssige bzw. nachschüssige Renten nicht miteinander zu verwechseln sind.

[3] siehe bspw. Luh & Stadtmüller [32]

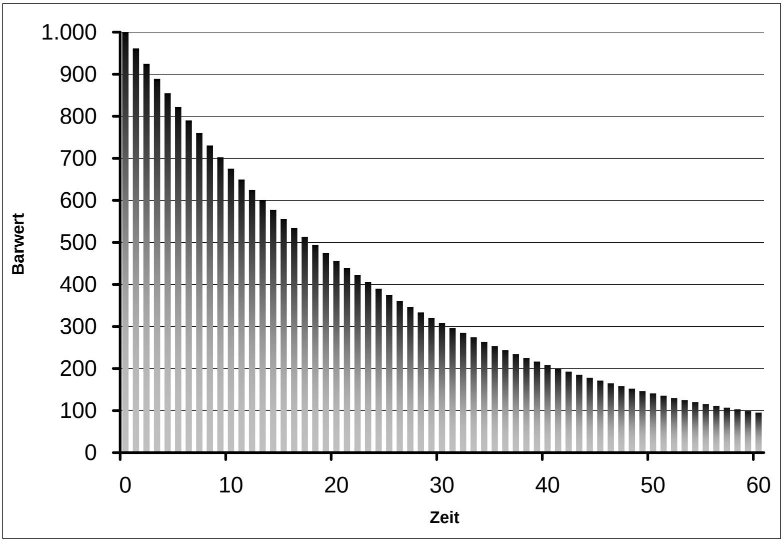

Abbildung 1.3: Summanden des Barwertes einer Zeitrente (4%)

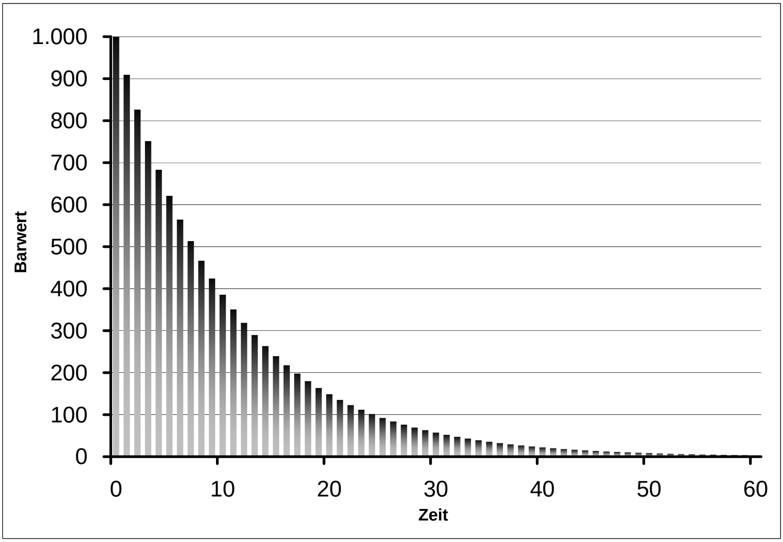

Abbildung 1.4: Summanden des Barwertes einer Zeitrente (10%)

Weiters ergibt sich für den Barwertfaktor der sofort beginnenden, nachschüssigen Zeitrente unter Verwendung von (1.5)

$$a_{\overline{n|}} = v + v^2 + v^3 \ldots + v^n = v \cdot \left(1 + v + \ldots + v^{n-1}\right) = v \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{i}$$

und für den Barwertfaktor der um m Jahre aufgeschobenen, nachschüssigen Zeitrente

$$_{m|}a_{\overline{n|}} = v^{m+1} + v^{m+2} + \ldots + v^{n+m} = v^m a_{\overline{n|}} = v^{m+1} \cdot \ddot{a}_{\overline{n|}}.$$

In den Abbildungen 1.3 bzw. 1.4 sind die einzelnen Summanden des Barwerts einer Zeitrente mit einer Laufzeit von 60 Jahren bei einem Zinsfuß von 4% bzw. 10% dargestellt. Daraus ist deutlich ersichtlich, dass die Barwerte der Summanden bei einem höheren Zinssatz viel schneller abnehmen.

Betrachten wir nun eine sofort beginnende, vorschüssige Zeitrente mit einer Ratenzahlung der Höhe R, dann erhalten wir

$$R + R \cdot v + \ldots + R \cdot v^{n-1} = R \cdot \left(1 + v + \ldots + v^{n-1}\right) = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n|}},$$

Der Rentenbarwert ergibt also durch Multiplikation des Rentenbarwertfaktors mit der Rentenhöhe R. Dies gilt analog auch für die weiteren bisher betrachteten Zeitrenten:

- m Jahre aufgeschobene, vorschüssige Zeitrente

$$BW = R \cdot {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n|}}$$

- sofort beginnende, nachschüssige Zeitrente

$$BW = R \cdot a_{\overline{n|}}$$

- m Jahre aufgeschobene, nachschüssige Zeitrente

$$BW = R \cdot {}_{m|}a_{\overline{n|}}$$

Beispiel 1.5 *Eine Zeitrente hat die jährliche Auszahlung von € 1.000,00, der Zinsfuß beträgt 4%. Damit ergibt sich ein Abzinsungsfaktor von*

$$v = \frac{1}{1{,}04} \approx 0{,}9615.$$

Für den Barwert der sofort beginnenden, 10-jährigen, vorschüssigen Rente erhal-

Zeit t	Vorgang
$t = 0$	1. Ratenzahlung: Reduktion um 1.000,00. $2.859{,}41 - 1.000 = 1.859{,}41$
$0 < t < 1$	1. Zinsperiode: Verzinsung mit 5%. $1.859{,}41 \cdot 1{,}05 = 1.952{,}38$
$t = 1$	2. Ratenzahlung: Reduktion um 1.000,00. $1.952{,}38 - 1.000 = 952{,}38$
$1 < t < 2$	2. Zinsperiode: Verzinsung mit 5%. $952{,}38 \cdot 1{,}05 = 1.000$
$t = 2$	3. Ratenzahlung: Reduktion um 1.000,00. $1.000 - 1.000 = 0$

Tabelle 1.3: Aufzehrung des Geldbetrages einer sofort beginnenden, 3-jährigen, vorschüssigen Zeitrente (Ratenhöhe: € 1.000,00, Zinssatz: 5%)(siehe Führer & Grimmer [19])

ten wir

$$1.000 \cdot \ddot{a}_{\overline{10}|} = 1.000 \cdot \frac{1 - 0{,}9615^{10}}{1 - 0{,}9615} = 8.435{,}33.$$

Der Barwert der sofort beginnenden, 10-jährigen, nachschüssigen Rente ist gegeben durch

$$1.000 \cdot a_{\overline{10}|} = 1.000 \cdot \frac{1 - 0{,}9615^{10}}{0{,}04} = 8.110{,}90.$$

Für den Barwert einer um 5 Jahre aufgeschobenen, 10-jährigen, vorschüssigen Rente erhalten wir

$$1.000 \cdot {}_{5|}\ddot{a}_{\overline{10}|} = 0{,}9615^5 \cdot 8.435{,}33 = 6.933{,}23.$$

Der Barwert einer um 5 Jahre aufgeschobenen, 10-jährigen, nachschüssigen Rente ist gegeben durch

$$1.000 \cdot {}_{5|}a_{\overline{10}|} = 0{,}9615^5 \cdot 8.110{,}90 = 6.666{,}57.$$

In Beispiel 1.5 sehen wir, dass der Barwert der nachschüssigen Zeitrente kleiner als jener der vergleichbaren vorschüssigen Zeitrente ist. Dies ist einfach erklärbar, denn bei der nachschüssigen Variante sind die Zahlungsströme zwar dieselben wie bei der vorschüssigen, die Zahlungen sind jedoch jeweils eine Periode später fällig und werden daher über eine Periode länger abgezinst. Daher muss sich also ein niedrigerer Wert ergeben.

Nun stellt sich noch die Frage nach der Bedeutung der Ergebnisse aus Beispiel 1.5. Betrachten wir die sofort beginnende 10-jährige vorschüssige Rente. Wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Betrag von € 8.435,33 mit einem Zinsfuß von 4% angelegt

Zeit t	Vorgang
$0 \leq t < 1$	1. Zinsperiode: Verzinsung mit 5%. 2.723,25·1,05 = 2.859,41
$t = 1$	1. Ratenzahlung: Reduktion um 1.000,00. 2.859,41 – 1.000 = 1.859,41
$1 < t < 2$	1. Zinsperiode: Verzinsung mit 5%. 1.859,41·1,05 = 1.952,38
$t = 2$	2. Ratenzahlung: Reduktion um 1.000,00. 1.952,38 – 1.000 = 952,38
$2 < t < 3$	2. Zinsperiode: Verzinsung mit 5%. 952,38·1,05 = 1.000
$t = 3$	3. Ratenzahlung: Reduktion um 1.000,00. 1.000 – 1.000 = 0

Tabelle 1.4: Aufzehrung des Geldbetrages einer sofort beginnenden, 3-jährigen, nachschüssigen Zeitrente (Ratenhöhe: € 1.000,00, Zinssatz: 5%)(siehe Führer & Grimmer [19])

wird und zu den entsprechenden Zeitpunkten die Raten entnommen werden, so kann die ganze Rente mit diesem Anfangsbetrag finanziert werden.

In den Tabellen 1.3 und 1.4 sehen wir, wie sich der Geldbetrag einer sofort beginnenden 3-jährigen vor- bzw. nachschüssigen Zeitrente entwickelt. Dabei wird zum Zeitpunkt $t = 0$ der Barwert bestimmt. Zu jedem weiteren Zeitpunkt der Rentenlaufzeit wird dann entweder die Auszahlung vom vorhandenen Kapital abgezogen oder das vorhandene Kapital wird um eine weitere Periode aufgezinst. Am Ende der Laufzeit muss natürlich das vorhandene Kapital genau der Auszahlung entsprechen und es bleibt kein Kapital übrig.[4]

Als nächstes betrachten wir den Endwert von Zeitrenten. Für die sofort beginnende, n-jährige, vorschüssige Zeitrente ergibt sich unter Anwendung von (1.6) der Endwertfaktor

$$\begin{aligned}\ddot{s}_{\overline{n}|} &= (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \ldots + (1+i) = (1+i)\cdot\big(1 + \ldots + (1+i)^{n-1}\big) \\ &= (1+i)\cdot\frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} = \frac{(1+i)^n - 1}{1 - \frac{1}{1+i}} = \frac{(1+i)^n - 1}{1-v}.\end{aligned}$$

Für die sofort beginnende, n-jährige, nachschüssige Zeitrente erhalten wir analog

$$s_{\overline{n}|} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Beispiel 1.6 *Eine Zeitrente hat die jährliche Auszahlung von € 1.000,00, der Zinsfuß beträgt 4%. Für den Endwert der sofort beginnenden, 10-jährigen, vor-*

[4]Diesen Vorgang nennt man Aufzehrung des Kapitals.

schüssigen Zeitrente erhalten wir

$$1.000 \cdot \ddot{s}_{\overline{10}|} = 1.000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1 - 0{,}9615} = 12.486{,}35.$$

Der Endwert der sofort beginnenden, 10-jährigen, nachschüssigen Zeitrente beträgt

$$1.000 \cdot s_{\overline{10}|} = 1.000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{0{,}04} = 12.006{,}11.$$

In Beispiel 1.6 sehen wir, dass auch der Endwert der nachschüssigen Zeitrente kleiner als jener der vergleichbaren vorschüssigen Zeitrente ist. Dies ist wieder einfach erklärbar, denn bei der nachschüssigen Variante sind die Zahlungsströme zwar dieselben wie bei der vorschüssigen, die Zahlungen sind jedoch jeweils eine Periode später fällig und werden daher über eine Periode weniger aufgezinst. Damit muss sich also ein niedrigerer Wert ergeben.

Nun zeigen wir noch den Zusammenhang zwischen Bar- und Endwertfaktor einer vorschüssigen Zeitrente:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{1 - v} = (1+i)^n \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{1 - v} = (1+i)^n \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v} = (1+i)^n \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} \quad (1.7)$$

Der Endwert entspricht also dem auf das Laufzeitende aufgezinsten Barwert. Umgeformt ergibt sich

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^n \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|}. \quad (1.8)$$

Beispiel 1.7 *Aus den Beispielen 1.5 und 1.6 kennen wir Bar- und Endwert für eine 10-jährige Zeitrente bei einer jährlichen Auszahlung von € 1.000,00 und einem Zinsfuß von 4%:*

$$1.000 \cdot \ddot{a}_{\overline{10}|} = 8.435{,}33$$
$$1.000 \cdot \ddot{s}_{\overline{10}|} = 12.486{,}35$$

Verwenden wir die hergeleiteten Zusammenhänge (1.7) *und* (1.8)*, dann resultieren*

$$8.435{,}33 \cdot 1{,}04^{10} = 12.486{,}35$$

und

$$12.486{,}35 \cdot 0{,}9615^{10} = 8.435{,}33.$$

Es besteht natürlich auch die Möglichkeit, dass eine Rente nicht konstant bleibende Raten ausbezahlt, sondern dass sich die Ratenhöhe ändert. Solche Renten

	Fälligkeit	Rentenhöhe	Barwert	Barwertfaktor
1. Zahlung	0	R	R	1
2. Zahlung	1	$2{\cdot}R$	$v{\cdot}2{\cdot}R$	$2{\cdot}v$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n-te Zahlung	$n-1$	$n{\cdot}R$	$v^{n-1}{\cdot}n{\cdot}R$	$n{\cdot}v^{n-1}$

Tabelle 1.5: Zahlungsströme einer vorschüssigen temporären steigenden Zeitrente

	Fälligkeit	Rentenhöhe	Barwert	Barwertfaktor
1. Zahlung	0	$n{\cdot}R$	$n{\cdot}R$	n
2. Zahlung	1	$(n-1){\cdot}R$	$v{\cdot}(n-1){\cdot}R$	$(n-1){\cdot}v$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n-te Zahlung	$n-1$	R	$v^{n-1}{\cdot}R$	v^{n-1}

Tabelle 1.6: Zahlungsströme einer vorschüssigen temporären fallenden Zeitrente

werden oft als dynamische Renten bezeichnet. Dabei betrachten wir zunächst zwei Spezialfälle, die arithmetisch steigende bzw. die arithmetisch fallende Zeitrente, wo sich die Rate jährlich um R erhöht bzw. um R reduziert. Bei der vorschüssigen, steigenden, n-jährigen Zeitrente wird zum Zeitpunkt t die Rate $(t+1){\cdot}R$ ausbezahlt, bei der vorschüssigen, fallenden, n-jährigen Rente die Rate $(n-t){\cdot}R$.

Die Barwerte und Barwertfaktoren sind für die vorschüssige Variante in den Tabellen 1.5 und 1.6 dargestellt. Summieren wir die Barwertfaktoren (also die Barwerte für eine Ratenhöhe $R=1$), dann erhalten wir die Barwertfaktoren für die sofort beginnende, steigende, vorschüssige Zeitrente

$$\begin{aligned}
(I\ddot{a})_{\overline{n}|} &= 1 + 2v + \ldots + n{\cdot}v^{n-1} \\
&= 1 + v + \ldots + v^{n-1} + v + \ldots + v^{n-1} + \ldots + v^{n-1} \\
&= \ddot{a}_{\overline{n}|} + {}_{1|}\ddot{a}_{\overline{n-1}|} + \ldots + {}_{n-1|}\ddot{a}_{\overline{1}|} \\
&= \frac{1-v^n}{d} + v{\cdot}\frac{1-v^{n-1}}{d} + \ldots + v^{n-1}{\cdot}\frac{1-v}{d} \\
&= \frac{1 + v + \ldots + v^{n-1} - n{\cdot}v^n}{d} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - n{\cdot}v^n}{d}
\end{aligned}$$

und für die sofort beginnende, fallende, vorschüssige Zeitrente

$$\begin{aligned}
(D\ddot{a})_{\overline{n}|} &= n + (n-1){\cdot}v + v^{n-1} \\
&= 1 + v + \ldots v^{n-1} + 1 + v + \ldots + v^{n-2} + \ldots + 1 \\
&= \ddot{a}_{\overline{n}|} + \ddot{a}_{\overline{n-1}|} + \ldots + \ddot{a}_{\overline{1}|} = \frac{1-v^n}{d} + \frac{1-v^{n-1}}{d} + \ldots + \frac{1-v}{d} \\
&= \frac{n - (v + v^2 + \ldots + v^n)}{d} = \frac{n - a_{\overline{n}|}}{d}.
\end{aligned}$$

Ein weiterer Spezialfall ist die sofort beginnende, geometrisch steigende, vorschüssige Zeitrente, bei der die Ratenhöhe jährlich um den Prozentsatz p erhöht wird.[5] Für den Barwertfaktor erhalten wir

$$\begin{aligned}
(I\ddot{a})^g_{\overline{n}|} &= 1 + (1+p)\cdot v + (1+p)^2\cdot v^2 + \ldots + (1+p)^{n-1}\cdot v^{n-1} \\
&= 1 + \frac{1+p}{1+i} + \frac{(1+p)^2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{(1+p)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} \\
&= 1 + \frac{1+p}{1+i+p-p} + \frac{(1+p)^2}{(1+i+p-p)^2} + \ldots + \frac{(1+p)^{n-1}}{(1+i+p-p)^{n-1}} \\
&= 1 + \frac{1}{\frac{1+p+i-p}{1+p}} + \frac{1}{\frac{(1+p+i-p)^2}{(1+p)^2}} + \ldots + \frac{1}{\frac{(1+p+i-p)^{n-1}}{(1+p)^{n-1}}} \\
&= 1 + \frac{1}{1+\frac{i-p}{1+p}} + \frac{1}{\left(1+\frac{i-p}{1+p}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{\left(1+\frac{i-p}{1+p}\right)^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Setzen wir nun[6]

$$\tilde{i} = \frac{i-p}{1+p}$$

und

$$\tilde{v} = \frac{1}{1+\tilde{i}},$$

dann folgt aus (1.6)

$$(I\ddot{a})^g_{\overline{n}|} = 1 + \tilde{v} + \tilde{v}^2 + \ldots + \tilde{v}^{n-1} = \frac{1-\tilde{v}^n}{1-\tilde{v}}.$$

Beispiel 1.8 *Eine 10-jährige, vorschüssige Zeitrente hat eine jährlich arithmetisch steigende Auszahlung, beginnend mit € 1.000,00, der Zinsfuß beträgt 4%. Für den Barwert erhalten wir unter Verwendung der Ergebnisse aus Beispiel 1.5*

$$1.000\cdot(I\ddot{a})_{\overline{10}|} = 1.000\cdot\frac{8{,}43533 - 10\cdot 0{,}9615^{10}}{1-0{,}9615} = 43.671{,}94.$$

Eine 10-jährige vorschüssige Zeitrente hat eine jährlich arithmetisch fallende Auszahlung, endend mit € 1.000,00, der Zinsfuß beträgt 4%. Für den Barwert erhalten wir

$$1.000\cdot(D\ddot{a})_{\overline{10}|} = 1.000\cdot\frac{10-8{,}1109}{1-0{,}9615} = 49.116{,}71.$$

Eine 10-jährige, vorschüssige Zeitrente hat eine jährlich um 5% geometrisch steigende Auszahlung, beginnend mit € 1.000,00, der Zinsfuß beträgt 4%.

[5] Ist $p < 0$ dann ist die Rente geometrisch fallend.

[6] Abhängig von der Höhe von p kann $\tilde{i}$ auch negativ sein. Da die Verzinsung der Zeitrente durch i gegeben ist, handelt es sich dabei aber nicht um eine negative Verzinsung.