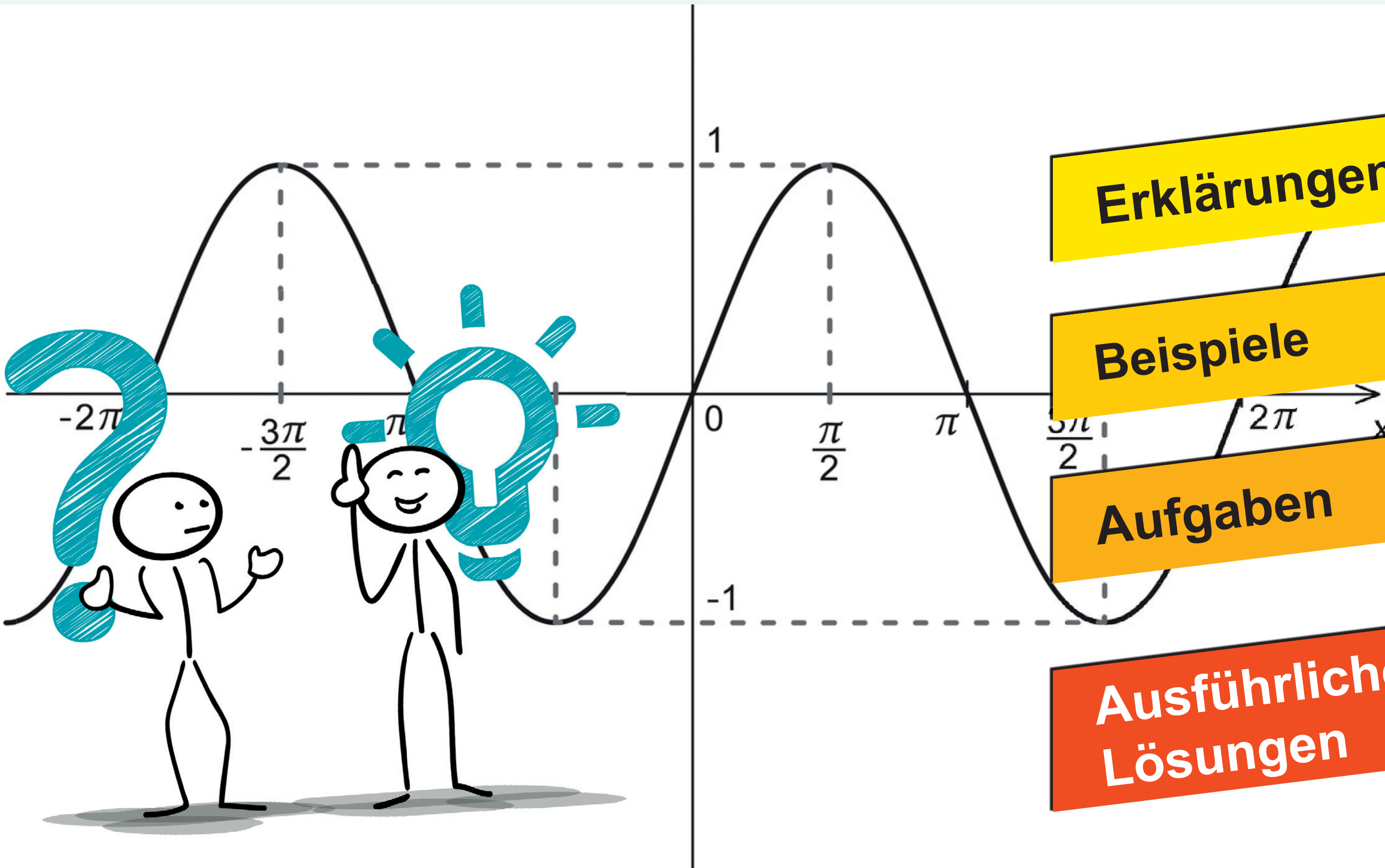
Sekundarstufe II

Barbara Theuer

Kurvendiskussion

Trigonometrische Funktionen



Erklärungen

Beispiele

Aufgaben

Ausführliche Lösungen

- Sinus- & Cosinusfunktionen
- Amplituden- & Periodenbestimmung u.v.m.

Lernen mit Erfolg
KOHL VERLAG
www.kohlverlag.de

Kurvendiskussion / Trigonometrische Funktionen

1. Digitalauflage 2016

© Kohl-Verlag, Kerpen 2016
Alle Rechte vorbehalten.

Inhalt: Barbara Theuer
Umschlagbild: © fotolia.com
Cliparts: © clipart.com
Grafik & Satz: Kohl-Verlag

Bestell-Nr. P11 855

ISBN: 978-3-96040-542-9

www.kohlverlag.de

© Kohl-Verlag, Kerpen 2016. Alle Rechte vorbehalten.

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt und unterliegen dem deutschen Urheberrecht. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages (§ 52 a Urhg). Weder das Werk als Ganzes noch seine Teile dürfen ohne Einwilligung des Verlages eingescannt, an Dritte weitergeleitet, in ein Netzwerk wie Internet oder Intranet eingestellt oder öffentlich zugänglich gemacht werden. Dies gilt auch bei einer entsprechenden Nutzung in Schulen, Hochschulen, Universitäten, Seminaren und sonstigen Einrichtungen für Lehr- und Unterrichtszwecke.
Der Erwerber dieses Werkes in PDF-Format ist berechtigt, das Werk als Ganzes oder in seinen Teilen für den Gebrauch und den Einsatz zur Verwendung im eigenen Unterricht wie folgt zu nutzen:

- **Die einzelnen Seiten des Werkes dürfen als Arbeitsblätter oder Folien lediglich in Klassenstärke vervielfältigt werden zur Verwendung im Einsatz des selbst gehaltenen Unterrichts.**
- **Einzelne Arbeitsblätter dürfen Schülern für Referate zur Verfügung gestellt und im eigenen Unterricht zu Vortragszwecken verwendet werden.**
- **Während des eigenen Unterrichts gemeinsam mit den Schülern mit verschiedenen Medien, z.B. am Computer, via Beamer oder Tablet das Werk in nicht veränderter PDF-Form zu zeigen bzw. zu erarbeiten.**

Jeder weitere kommerzielle Gebrauch oder die Weitergabe an Dritte, auch an andere Lehrpersonen oder pädagogischen Fachkräfte mit eigenem Unterrichts- bzw. Lehrauftrag ist nicht gestattet. Jede Verwertung außerhalb des eigenen Unterrichts und der Grenzen des Urheberrechts bedarf der vorherigen schriftlichen Zustimmung des Verlages. Der Kohl-Verlag übernimmt keine Verantwortung für die Inhalte externer Links oder fremder Homepages. Jegliche Haftung für direkte oder indirekte Schäden aus Informationen dieser Quellen wird nicht übernommen.

Kohl-Verlag, Kerpen 2016

Inhalt

Vorwort

Prozesse in der Natur laufen sehr oft nach einem bestimmten zeitlichen Plan ab, wiederholen sich nach gleichen Zeitspannen und bestimmen so den Rhythmus unseres Lebens.

Solche zeitlich periodischen Vorgänge zu beschreiben, um die Gesetze der Natur beispielsweise für Physik, Astronomie und Technik greifbarer zu machen, ist Aufgabe der Mathematik.

So kommen Praxisbezüge und fachübergreifende Aspekte auch in diesem Heft zum Tragen.

Die durch den Umlauf unseres Erdtrabanten verursachten Gezeiten, welche den Meeresspiegel rhythmisch heben und senken, die periodisch zu- und abnehmende Taglänge in Abhängigkeit von der Position der Erde auf ihrer Bahn um die Sonne, die Gesetzmäßigkeiten der Schwingungen des Wechselstromes oder einer elastischen Schraubenfeder werden anschaulich und motivierend als Beispiele zur praktischen Anwendung von modifizierten Sinusfunktionen vorgestellt. Auf der Grundlage von bereitgestellten Daten werden die Schüler mit vielfältigen Arbeitsaufträgen zum Auffinden der entsprechenden Funktionsgleichungen bzw. zum Darstellen der funktionalen Abhängigkeit mittels Graphen angeregt.

Als Ausgangspunkt für die Erarbeitung der Graphen von Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion dient der Einheitskreis, sodass beispielsweise der Zusammenhang zwischen den Funktionswerten der Sinusfunktion und der Projektion der Koordinaten eines auf der Kreisbahn umlaufenden Punktes P beim Erarbeiten des Funktionsgraphen mit Hilfe repräsentativer Punkte deutlich wird. Vorgegebene Abbildungen, Wertetabellen und Koordinatensysteme erleichtern den Schülern die formalen Arbeiten und machen Konzentration auf das Wesentliche möglich. Die Eigenschaften der Winkelfunktionen, wie ihr Definitions- und Wertebereich, Periode, Amplitude, und Extrempunkte können in vorgegebenen Tabellen übersichtlich zusammengestellt werden. Zahlreiche Aufgaben, darunter Zuordnungsübungen, sind geeignet, die grundlegenden Eigenschaften der modifizierten Sinusfunktion zu festigen.

Bei den einfachen Winkelfunktionen sind Funktionsuntersuchungen auf Grund ihrer periodischen Eigenschaften mit elementaren mathematischen Methoden möglich. Erst bei zusammengesetzten Winkelfunktionen müssen die Methoden der Differentialrechnung herangezogen werden, um Anstieg, Extrem- und Wendepunkte zu berechnen. Deshalb sind die letzen Kapitel der Anwendung der Differentialrechnung auf Winkelfunktionen gewidmet. Neben vielfältigen grundlegenden Übungen zum Differenzieren, Berechnungen von Tangenten und zu Kurvendiskussionen werden mathematisch interessierte Schüler gefordert, die Definition des Differentialquotienten zur Herleitung der Ableitung der Sinusfunktion einzusetzen – eine anspruchsvolle Aufgabe.

Wir hoffen, Ihnen mit vorliegenden Arbeitsblättern eine gute Unterstützung zum differenzierten Üben und Festigen trigonometrischer Funktionen sowie zu fachübergreifenden Betrachtungen bieten zu können und wünschen Ihnen und Ihren Schülern erfolgreiche Arbeit.

Das Kohl-Verlagsteam und Barbara Theuer

Kurvendiskussion / Trigonometrische Funktionen – Bestell-Nr. P11 855
KOHL VERLAG

1 Trigonometrische Beziehungen am Dreieck

1.1 Fundamentale Gesetze für Dreiecke zur Wiederholung (Blatt 1)

Aufgabe 1: *Wiederhole die grundlegenden Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln am allgemeinen Dreieck. Welcher bedeutsame Satz gilt für rechtwinklige Dreiecke? Du benötigst die Gesetze, um die Aufgaben auf Blatt 2 zu lösen.*

(1) Dreiecksungleichung

In jedem nicht entarteten Dreieck sind die Summen der Längen zweier Dreiecksseiten stets größer als die Länge der dritten Seite.

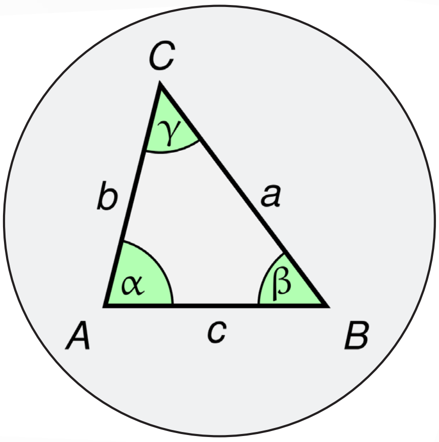
$a + b > c$, $a + c > b$ und $b + c > a$

(2) Innenwinkelsatz

In jedem ebenen Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkel 180°.

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Wie lautet die „Dreiecksungleichung“ für reelle Zahlen?



Was gilt für die Summe der Innenwinkel in einem sphärischen Dreieck?

(3) Seiten-Winkel-Beziehung

In jedem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten auch der größere Winkel gegenüber.

Aus $a \leq b$ folgt $\alpha \leq \beta$ usw.

(4) Lehrsatz des Pythagoras

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat.

Für $\gamma = 90°$ folgt

$a^2 + b^2 = c^2$

(5) Kongruenzsätze

siehe Blatt 2

↓

Kurvendiskussion / Trigonometrische Funktionen – Bestell-Nr. P11 855
KOHL VERLAG

1 Trigonometrische Beziehungen am Dreieck

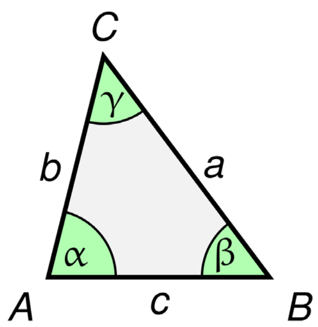
1.1 Fundamentale Gesetze für Dreiecke zur Wiederholung (Blatt 2)

(5) Kongruenzsätze für Dreiecke

Zwei Dreiecke, die in …

– ihren drei Seitenlängen **sss**
– zwei Seitenlängen und der Größe des von diesen Seiten eingeschlossenen Winkels **sws**
– einer Seitenlänge und in den dieser Seite anliegenden Winkeln **wsw**
– in zwei Seitenlängen und in dem der längeren Seite gegenüberliegenden Winkel **SsW**

übereinstimmen, sind **kongruent**.



Aufgabe 1: *Existieren folgende wie im Bild rechts benannte Dreiecke? Gib die Nummer des entsprechenden mathematischen Gesetzes an, welches als Grundlage für deine Entscheidung bei „Dreieck existiert nicht“ dient.*

a) $c = 10$ cm, $a = 12$ cm, $\gamma = 90°$

____

b) $\alpha = 90°$, $a = 20$ cm, $c = 16$ cm

____

c) $b = 13$ cm, $c = 12$ cm, $\beta = 90°$

____

d) $a = 7$ cm, $b = 8$ cm; $c = 16$ cm

____

e) $a = b = 8$ cm, $\alpha = 50$, $\gamma = 90°$

____

KOHL VERLAG Kurvendiskussion / Trigonometrische Funktionen – Bestell-Nr. P11 855

1 Trigonometrische Beziehungen am Dreieck

1.2 Definition von Sinus, Kosinus und Tangens am rechtwinkligen Dreieck (Blatt 1)

Aufgabe 1:

a) *Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit folgenden Abmessungen:* $c = 5\ \text{cm}$, $\alpha = 30°$, $\gamma = 90°$

b) *Ermittle die Länge der Strecke a zeichnerisch.*

c) *Berechne das Streckenverhältnis* $\frac{a}{c}$.

Trage die Werte in die untenstehende Tabelle ein.

Aufgabe 2:

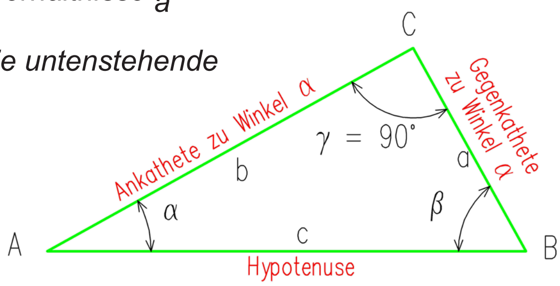
a) *Konstruiere nun fünf weitere Dreiecke mit den Abmessungen für* α *und* γ *wie bei Aufgabe 1 und c = 6 cm (8 cm, 9 cm, 10,5 cm, c nach eigener Wahl)*

b) *Ermittle in jedem dieser Dreiecke die Länge der Strecke a.*

c) *Berechne die entsprechenden Streckenverhältnisse* $\frac{c}{a}$ *auf Zehntel genau.*
Trage sämtliche Werte übersichtlich in die untenstehende Tabelle ein.

d) *Zu welcher Erkenntnis kommst du?*

e) *Führe eine analoge Untersuchung bei verändertem Winkel* $\alpha = 60°$ *durch.*



____

____

____

α	γ	c	a	$\frac{a}{c}$
30°	90°			
60°				

Aufgabe 3:

Vom Endpunkt E einer Hauswand, deren Länge EF = 15,5 m bekannt ist, wird ein Punkt P im Garten unter einem Winkel von 60° angepeilt. Von P aus erscheint die Grundseite EF der Hauswand unter einem Winkel von 90°.

Fertige eine Skizze an und berechne unter Nutzung deiner Erkenntnisse aus Aufgabe 2 die Länge der Strecke FP.

KOHL VERLAG

Trigonometrische Beziehungen am Dreieck

1.2 Definition von Sinus, Kosinus und Tangens am rechtwinkligen Dreieck (Blatt 2)

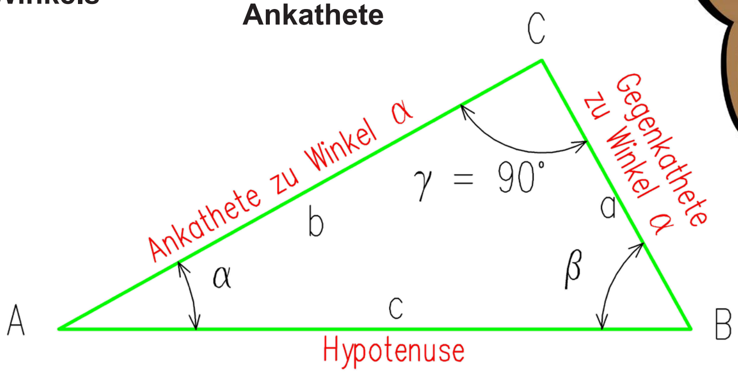
In ähnlichen Dreiecken, die in allen drei Winkeln übereinstimmen, stimmen auch die Verhältnisse der Längen einander entsprechender Seiten überein. Am rechtwinkligen Dreieck werden die Seitenverhältnisse mit besonderen Begriffen definiert. Ihr Wert hängt von der Größe des entsprechenden spitzen Winkels ab und nimmt somit für alle Winkel gleicher Größe den gleichen Wert an.

Definition des Sinus eines Spitzen Winkels im rechtwinkligen Dreieck

Sinus eines Winkels = $\dfrac{\textbf{Gegenkathete des Winkels}}{\textbf{Hypotenuse}}$

Kosinus eines Winkels = $\dfrac{\textbf{Ankathete des Winkels}}{\textbf{Hypotenuse}}$

Tangens eines Winkels = $\dfrac{\textbf{Gegenkathete des Winkels}}{\textbf{Ankathete}}$



Kurzschreibweise beispielsweise: sin α, cos α, tan β, sin 30°, cos 60° usw.

Für die meisten Winkel ergeben sich mit wenigen Ausnahmen irrationale Zahlen für Sinus, Kosinus und Tangens und auch das Ermitteln durch Konstruktion liefert meist keine exakten Ergebnisse. Deshalb ist der Einsatz des Taschenrechners hier sinnvoll.

Aufgabe 4: *Ermittle folgende Seitenverhältnisse mit dem Taschenrechner. Gib die Ergebnisse auf vier Stellen nach dem Komma an, wobei die vierte Stelle gerundet werden soll.*

sin 60° ≈ ______________ cos 60° = ______________

sin 45° ≈ ______________ cos 45° ≈ ______________

sin 30° = ______________ cos 30° ≈ ______________

tan 45° = ______________ tan 60° ≈ ______________

Aufgabe 5: *Was fällt dir beim Vergleich auf?*

____

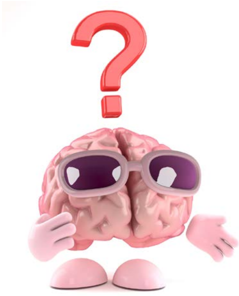
Kurvendiskussion / Trigonometrische Funktionen – Bestell-Nr. P11 855
KOHL VERLAG

1 Trigonometrische Beziehungen am Dreieck

1.3 Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck (Blatt 1)

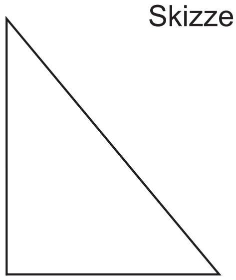
Aufgabe 1: *Berechne auf die Länge der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse von 11 cm Länge und einem spitzen Winkel von 60°. Mache die Probe mit Hilfe des Satzes des Pythagoras.*

Skizze

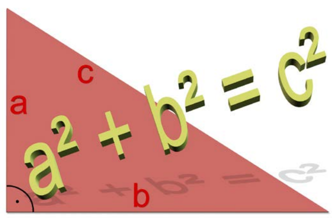


Aufgabe 2: *Beweise mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks, dass gilt: tan 45° = 1. Ergänze dazu die Skizze passend.*

Skizze

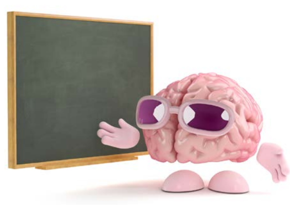


Aufgabe 3: *Wie lang sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit einem spitzen Winkel von 45° und der Hypotenuse von 10 cm Länge?*



Aufgabe 4: *Zeige am rechtwinkligen Dreieck, dass exakt gilt: cos 60° = $\frac{1}{2}$.*

Skizze



Kurvendiskussion / Trigonometrische Funktionen – Bestell-Nr. P11 855
KOHL VERLAG