Reinhard Pantel

LOGARITHMUS

Teil II

Einführung ins logarithmische Rechnen

-.-

EIN LEHRPROGRAMM,
FÜR DEN
SELBSTUNTERRICHT
GESCHRIEBEN

2016

Reinhard Pantel

LOGARITHMUS

Teil II

Einführung
ins
logarithmische
Rechnen

-.-

EIN LEHRPROGRAMM,
FÜR DEN
SELBSTUNTERRICHT
GESCHRIEBEN

2016

Zum Geleit

Den Logarithmus berechnen heißt,
den Exponenten einer Potenz bestimmen:
Logarithmen sind Hochzahlen.

Vorwort

Dieses Lernprogramm wurde für Personen geschrieben, die aus zeitlichen oder entfernungsbedingten Gründen an keiner Fortbildungsmaßnahme teilnehmen können, die von einer ständig zur Verfügung stehenden Unterrichtslehrkraft begleitet wird, um. z.B. einen gewünschten Wissenstand aufzufrischen oder um einen evtl. noch fehlenden Schulabschluss nachholen zu können. **…** oder vielleicht auch gar für alle diejenigen, die zu Hause eine Nachbearbeitung eines vorangegangenen Mathematikunterrichts benötigen:

Dieses Lehrprogramm setzt den Kenntnisstand des vorangegangenen Einführungsteils voraus, wo nur im Rahmen der Zehnerpotenzen gearbeitet wurde, da vorgesehen war, nicht gleich einen wissenschaftlichen Rechner mit einzubeziehen. Der Benützer sollte sich erst einmal mit den Grundlagen des Logarithmus vertraut machen. In diesem Fortführungsteil wird versucht, durch eingeblendete Tabellen die Benützung eines wissenschaftl. Rechners zu umgehen.

Inhalt

<u>Rückblick</u>

Wir haben gelernt, dass das ***<u>logarithmische Rechnen</u>*** eine *Umkehrung des Potenzierens* ist und dass *„Logarithmen“* = Hochzahlen *(Exponenten)* sind

und dass die Potenz-Rechenregeln beim Rechnen mit Logarithmen weiterhin gültig sind.

Damit wissen Sie, dass Potenzen mit gleicher Basis miteinander **<u>multipliziert</u>** werden, indem man deren Exponenten *(Hochzahlen)* <u>a**ddiert.**</u>

<u>Beispiel</u>: $a^2 \cdot a^2 = a^{2+2} = a^4$

<u>Mit Zahlen:</u> $3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6 = 729$

<u>Probe</u>: $9 \cdot 81 = 729$

Analog zum Multiplizieren werden bei einer **<u>Division</u>** die Potenzen *(mit gleichen Basen)* **<u>subtrahiert</u>.**

<u>Beispiel</u>: $a^2 : a^2 = \frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0 = 1$

<u>Mit Zahlen:</u> $3^4 : 3 = 3^4 : 3^1 = 3^{4-1} = 3^3 = 27$

<u>Probe:</u> $81 : 3 = 27$

Beim **<u>Radizieren</u>** (Wurzelziehen) wird der Exponent durch den Wurzelexponenten **dividiert**.

$$\sqrt{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a$$

$$\sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^{\mathbf{1}} = 2$$

Wir haben an den Beispielen gesehen, dass *„komplizierte“* Rechenoperationen auf einfachere Rechenoperationen zurückgeführt werden.

Während beim **<u>Potenzieren</u>** *(Vervielfachen)* nach dem ***Potenzwert*** gefragt wird [$2^{\mathbf{3}}$ = ?] , d.h. Basis und Exponent sind bekannt und das Ergebnis, *die Potenz* bzw. *der Potenzwert* wird gesucht,
so wird jetzt beim **Logarithmieren** nach dem **<u>Exponenten</u>** ***(= der Hochzahl = dem Logarithmus)*** gefragt.

<u>POTENZIEREN</u>: : $10^{?} = 100$

<u>LOGARITHMIEREN</u>: lg 100 = ?

[**lg** ist ein Rechenoperationszeichen wie + oder – oder Bruchstrich]
Numerus = die zu logarithmierende Zahl

Definition:

Der **Logarithmus einer Zahl** ist derjenige Potenzexponent, mit dem man die logarithmische Basis potenzieren muss, um den **Numerus** *(die zu logarithmierende Zahl)* zu erhalten.

log 100 zur Basis 10 = ?

lg 100 = 2, da 10^2 = 100

Wenn man **lg 100** schreibt, weiß man, dass das ***dekadische*** *System* gemeint ist.

lg 100 = 2

Wie z.B. der **Bruchstrich** zur ***Divisionsaufgabe*** führt, so fordert uns die Abkürzung **„log“** bzw. **„lg“** auf, einen **Logarithmus** = *Hochzahl* = *Exponenten* zu einem ***Numerus*** *(lat. „numerus logarithmandus = einer zu logarithmierenden Zahl)* zu finden

bzw. weiter dann – *je nach Aufgabenstellung* - auf der Exponenten-**Logarithmen-Ebene** zu
addieren *[Summand + Summand = Summe]*

subtrahieren *[Minuend – Subtrahend = Quotient]*

multiplizieren *[Faktor x Faktor = Produkt]*
und zu
dividieren *[Dividend **:** Divisor = Quotient].*

In Anwendung der ***<u>Potenzgesetze</u>*** haben wir im Einführungsteil **<u>für das logarithmische Rechen</u>** folgende

<u>Rechenregeln</u>

kennengelernt:

<u>Die Rechenarten:</u>

I. <u>DIE MULTIPLIKATION:</u>

Zwei Zahlen werden miteinander **<u>multipliziert,</u>** indem man ihre Logarithmen *(Exponenten)* **<u>addiert</u>** und zur Summe den zugehörigen Numerus *(die zu logarithmierende Zahl)* feststellt.

<u>Beispiel</u>: $\lg(10 \cdot 10) = \lg 10 + \lg 10$

= da $10 = 10^{1}$, also den Exponenten **1** hat, folgt:

$$\lg(10 \cdot 10) = \lg 10^{1+1}$$

Da Logarithmen = Hochzahlen *(Exponenten)* sind, rechnen wir nun auf der Exponenten-Zeile weiter und erhalten**:** $1 + 1 = 2$

Der *Logarithmus* lautet *nach dieser Addition* = **2.**

<u>LÖSUNG</u>: $\lg(10 \cdot 10) = 10^{2} = 100$

II. <u>DIE DIVISION:</u>

Wir haben auch die **<u>logarithmische Division</u>** kennengelernt:

Zwei Zahlen werden durcheinander **<u>dividiert,</u>** indem man ihre Logarithmen *(Hochzahlen)* **<u>subtrahiert</u>** und zur Differenz den zugehörigen Numerus *(die zu logarithmierende Zahl)* feststellt.

<u>Aufgabe:</u>

Bitte dividieren Sie:

$$\lg (10 : 10) \;=\; \lg 10 \;-\; \lg 10$$

<u>LÖSUNG:</u>

Da $10 = 10^{1}$, also den Exponenten **1** hat, folgt:

$$\lg (10 : 10) = \lg (10^{1} : 10^{1}) = \lg 10^{1-1}$$

Da Logarithmen = Hochzahlen *(Exponenten)* sind, rechnen wir *- wie bei der Multiplikation -* auf der Exponenten-Zeile weiter:

[Wenn wir auf der Exponenten-Logarithmen-Hochzahlen-Zeile rechnen, muss unser Ergebnis auch dementsprechend ein Exponent bzw. ein Logarithmus sein].

$$1 - 1 = 0$$

$$1 - 1 = 0$$

Der *Logarithmus (die Hochzahl/Exponent)* lautet *nach dieser Subtraktion* **auf der Exponentenzeile** = **0**

Da $= 10^{\mathbf{0}} = 1$ ist, lautet das Ergebnis

$$\lg (10 : 10) = 1$$

III. <u>**DAS POTENZIEREN** *(Vervielfachen):*</u>

Eine Zahl wird logarithmisch <u>**potenziert**</u> *(vervielfältigt),* indem man den Logarithmus der Zahl mit den Exponenten *(Hochzahlen)* <u>**multipliziert**</u> und zu diesem Produkt den zugehörigen Numerus *(Logarithmus)* feststellt.

<u>Aufgabe:</u>

$$\lg 10^2 = 2 \cdot \lg 10 = \lg^{2 \cdot 1}$$

Wir rechnen auf der Exponentenzeile weiter:

$$2 \cdot 1 = 2$$

Der Numerus *(Logarithmus)* lautet nach erfolgter Multiplikation = 2

<u>LÖSUNG</u>: $\lg 10^2 = 100$

IV. <u>DAS RADIZIEREN:</u>

Eine Zahl wird **<u>radiziert</u>**, indem man den Logarithmus der Zahl durch den Wurzelexponenten **<u>dividiert</u>** und zu dem Quotienten den zugehörigen Numerus *(Logarithmus)* feststellt.

$$\lg \sqrt{100} = \lg \sqrt[2]{100}$$

[*Der Wurzelexponent 2 wird üblicherweise <u>nicht</u> mitgeschrieben]*

$$\lg \sqrt[2]{100} = \frac{1}{2} \cdot \lg 100$$

Auf der Exponenten*<u>zeile</u> (wo unser Ergebnis auch ein Exponent sein wird),* rechnen wir nun weiter, wobei wir bei **lg 100** nach einer Hochzahl suchen, um auf der Exponentenzeile weiterrechnen zu können. Da $100 = 10^{2}$ ist, steht uns nun der Exponent 2 zum Weiterrechen zur Verfügung:

$$\frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{2}{2} = \mathbf{1}$$

<u>LÖSUNG</u>:

Da der **Exponent 1** lautet und damit $10^{\mathbf{1}} = 10$ ist, lautet unser Endergebnis:

$$\lg \sqrt{100} = 10^{\mathbf{1}} = 10$$

<u>Wir stellen fest:</u>

Durch das Rechnen mit Logarithmen wird jede Rechnungsart auf die nächstniedere Rechnungsstufe zurückgeführt:

Aus der **Multiplikation** wird eine Addition,
aus der **Division** eine Subtraktion,
aus **Potenzieren** wird ein Multiplizieren
und aus dem **Radizieren** *(Wurzelziehen)*
eine Division.

Wir haben den Einführungsteil ausklingen lassen mit der Erkenntnis, dass sich die Logarithmen aller ganzzahligen Potenzen von **10** (mit den Zehnerpotenzen) leicht bestimmen lassen.

Dazu gleich eine **<u>Aufgabe</u>**:
Bitte nennen Sie die *Logarithmen (Hochzahlen)* zu den zu *logarithmierenden* (Numerus) – *Zahlen* 1, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000

Zahl 1 = **10**$^{\mathbf{0}}$

Zahl 10 = **10**$^{\mathbf{1}}$

Zahl 100 = 10^{2}
Zahl 1.000 = 10^{3}
Zahl 10.000 = 10^{4}
Zahl 100.000 = 10^{5} *usw.*

[Die Anzahl der Nullen entspricht denen der Hochzahl]

<u>Lösung</u>: Es sind die *Hochzahlen (Logarithmen),* auf die die Pfeilspitzen hinzeigen.

Überlegung:

Da $\mathbf{10^0 = 1}$ ist und $\mathbf{10^1 = 10}$,

müsste es doch auch **zwischen** diesen beiden Zahlen

1 und **10**,

und damit **zwischen** den beiden **Hochzahlen**

<u>*Null*</u> und der <u>*Eins*</u> doch auch Hochzahlen *(= Logarithmen)* geben?

Wir haben bisher nur mit den *Logarithmen (Hochzahlen)* gearbeitet, die zu den Zahlen der Zehnerpotenz gehören, also mit

1, 10, 100, 1.000, 10.000 **…** usw.

und deren Exponenten uns inzwischen vom vielen Gebrauch bestens vertraut sind.

$\mathbf{10^0 = 1}$	**lg 1 = 0**
$\mathbf{10^1 = 10}$	**lg10 = 1**
$10^2 = 100$	lg 100 = 2
$10^3 = 1.000$	lg 1.000 = 3
$10^4 = 10.000$	lg 10.000 = 4

Zwischen diesen <u>**Numerus*-Zahlen**</u> **1** und 1**0** gibt es doch Zahlen von 2 , 3, 4 , **…** 8 bis 9 , *(wie z.B. beim Längenmaß von 1 cm es diese mit den dazwischen liegenden Millimetern auch gibt).*

<u>***Numerus**</u> = *die zu logarithmierende Zahl*
(<u>lat.</u> = „Numerus logarithmandus)

Auf der Logarithmen - *(Exponenten)* - Ebene muss es folglich zwischen *Null* und *Eins* auch Zahlen geben, die dann alle als ***<u>Dezimalzahl</u>*** *beginnen müssen, also mit 0****,1*** bis 0,9 **…** 1,0, die die Logarithmen- *(Exponenten) - Lücke* (zwischen *Null* und *Eins) ausfüllen.*

10^{0} - 0,1 - 0,2 - 0,3 - 0,4 - 0,5 ... **- 0,8 - 0,9 - 10^{1}**

Zahl <u>1</u> **Zahl <u>10</u>**

<u>Zur Erinnerung</u>**:** **Die <u>zwei</u> Zahlenebenen:**

a). Zwischen der **Ebene der <u>Grundzahl</u>** ***(Basis)*** **von 1 bis 10** *(der natürliche Zahlen)* zum einen, und dem gegenüber

b). der **Ebene *der <u>Hochzahlen</u>*** *(Exponenten)* ***ab 0,1 bis 0,9, die zwischen dem Wert*** $10^{\mathbf{0}}$ **= 1** *und* $10^{\mathbf{1}}$ **= 10** liegt.

[BASISWERT] [BASISWERT]

1 [HOCHZAHLEN = LOGARITHMEN] **10**

o,1 - o,2 – o,3 – o,4 -**…** – o,8 – o,9 –

0 **1**

Die Hochzahlen zwischen Null und Eins

<u>Exponent Null</u> *<u>Exponent 1</u>*

<u>Der Exponent</u> „Null“ [$10^{\mathbf{0}}$] hat den <u>Basiswert 1</u>

[eine Stelle]

<u>Der Exponent</u> „*eins*“ [$10^{\mathbf{1}}$] hat den <u>Basiswert</u> 1**0**.

[zwei Stellen]

<u>Der Exponent</u> „zwei“ [10^{2}] **hat den** <u>Basiswert</u> 1**00**

[drei Stellen] **usw.**

Wir unterscheiden also unter zwei *Ebenen***:**

a). <u>Die **Logarithmen** – *Exponenten* **- Ebene**</u>:

<u>Von</u> Null 10^0 bis 10^1, dazwischen die Dezimalzahlen, die mit der ***<u>Kennziffer</u>*** *Null* (0**,....**) beginnen.

b). Die zu logarithmierende Ebene der **<u>Numerus</u>** - Zahlen, also die der *natürlichen Zahlen* (= *Zahlen des „natürlichen Zählens" mit gleichen Abständen, hier von 1 bis 10).*

Bitte machen Sie sich mit den nachstehenden Bezeichnungen beim **Logarithmus** vertraut:
*[Den Wert **2,**00432 haben wir über einen wissenschaftlichen Taschenrechner ermittelt (siehe Seite 17)].*

*zum Vergleich**:***

lg 101 = **2,**00432 [lg 100 = **2,**00000 (da $10^{\mathbf{2}}$ = 100)]

Die **<u>Kennziffer</u>,** Die **<u>Mantisse*</u>** (hier 5-stellig)
Der **<u>Numerus</u>** ist *die zu logarithmierende Zahl.*
*[***** lat.: manissa = Zugabe]*

Das *(zugestandene gewöhnungsbedürftige)* Ergebnis lautet: lg 101 = **2,**00432

*Der Logarithmus (Exponent) für lg 101 lautet **2,**00432*

<u>denn:</u> $10^{\mathbf{2,00432}} = 101$

Wir kennen von den Zehnerpotenzen her:

lg 1 = **0** denn: $10^{\mathbf{0}} = 1$ **lg 100** = 2

lg 2 $10^2 = 100$

lg 3 *Zwischen* ***lg 1*** *und* ***lg 10***

lg 4 *muss es doch auch Zahlen geben,*

und damit zwischen „Null und eins“,

den Ergebnissen = ***Logarithmen,***

lg 8 *den Exponenten (0 und 1) auch!*

lg 9

lg 10 = **1** denn: $\mathbf{10^1} = 10$ → **lg 1.000** = **3**

→ $10^3 = 1.000$

Wir betrachten eine ähnliche Darstellung:

$\log_{10} x = y$ → lg x = y

Numerus ***Logarithmus*** *(Exponent)*

$\log_{10} 1 = \mathbf{0}$ → **lg 10 = 1**

denn: $10^{\mathbf{0}} = 1$ → **lg 1 = 0**

$\mathbf{10 = 10^1}$

Oder: lg 100 = 2 *denn* $10^2 = 100$

Oder: lg 1.000 = 3 *denn* $10^3 = 1.000$ usw.

Logarithmen *[Hochzahlen] zwischen Null und Eins*
beginnen ***immer*** *mit* ***Null, Komma***

0,o o,1 - o,2 – o,3 – o,4 **…** – o,8 – o,9 – **1**,0

1 10

Bitte betrachten Sie einmal diese Darstellung:

0,o o,1 - o,2 – o,3 – o,4 **…** – o,8 – o,9 – **1**,0

lg 1 **lg 10**

<u>Logarithmen</u> [Hochzahlen] zwischen Null und Eins

<u>Der Logarithmus einer Zahl</u>

besteht aus **2** Teilen:

Der **Kennziffer**, = das ist die Zahl <u>vor</u> dem Komma und
der **<u>Mantisse</u>**, = das ist die Zahlenfolge <u>nach</u> dem Komma; meist 4 bis 5-stellig.

lg 1 = **0,0** [$10^{0,0}$ = 1]
lg 2 = 0**,**30102 [$10^{0,30102}$ = 2]
lg 3 = 0**,**47712 [$10^{0,47712}$ = 3]
lg 4 = 0**,**60206 <u>usw</u>.
lg 5 = 0**,**69897
lg 6 = 0**,**77815

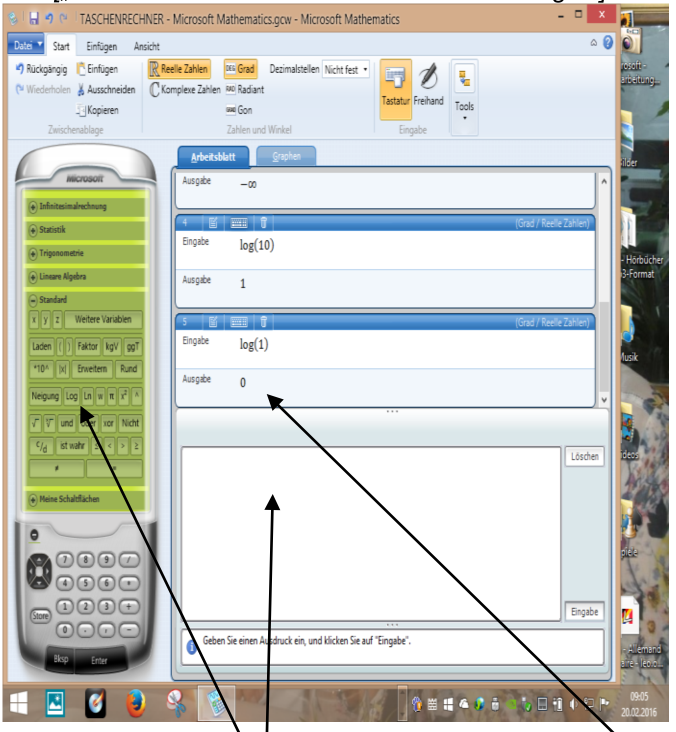
lg 7 = 0**,**84510
lg 8 = 0**,**90308
lg 9 = 0**,**95424
lg 10 = **1,0**

<u>Anmerkung:</u> Die Werte der vorstehenden Hochzahlen **(= Logarithmen)** haben wir dank eines *wissenschaftlichen* Taschenrechners *über den Bildschirm (Desktop) [z.B. Microsoft Mathematics**.**gcw].* ermittelt.

(siehe hierzu die nachstehende Seite 17).

Die *Briggsschen Tabellen* sind nicht mehr aktuell; der *Rechenschieber* dagegen eher.

[„Taschenrechner“ Microsoft Mathematics.gcw].



[Hier geben Sie z.B. ***log 1*** *ein und erhalten so den Wert]*

Bei der Übertragung der **Logarithmen** *(Hochzahlen)* von Seite 16 machen wir die Beobachtung, dass die Abstände zwischen den Logarithmen von Punkt *1 zu 2; von 2 zu 3;* **…** *8 zu 9, 9 zu 10* immer enger werden. (Skizze)

0,o o,1 - o,2 – o,3 – o,4 **…** – o,8 – o,9 – **1**,0

lg 1 **lg 10**

[Denken Sie ggf. auch an die unterschiedlichen Zahlenabstände auf dem Rechenschieber]

Mit den Hochzahlen werden auch die Differenzen von ***Mantisse zu Mantisse*** immer enger, je näher wir uns dem **Numerus 10** nähern.

log bzw. **lg** sind **<u>Rechenoperationszeichen</u>**.

Diese Zeichen stellen uns die Aufgabe, einen Exponenten (eine *Hochzahl* = einen **Logarithmus**) zu einem **Numerus** *(= einer zu logarithmierenden Zahl)* zu finden.

Ist $g^h = p$, so ist $\log_g p = h$

[g= Grundzahl; h = Hochzahl; Exponent; p = eine Zahl zur Grundzahl g]

Bisher haben wir nur mit Exponten

lg 2 = 0,30102 lg 3 = **0,**47712

Numerus = Kennziffer , Mantisse *(5-stellig)*

<u>*Numerus*</u> = *die zu logarithmierende Zahl*

Es ist somit $\mathbf{10}^{0{,}477121} = 3$ *(Numerus)*,

also die Zahl, zu der ein Exponent (Hochzahl) gesucht wird.

Wir beginnen unsere Aufstellung mit den **Hochzahlen zur Basis 10** mit einer <u>Mantisse</u> *(sie folgt, wie Sie wissen, nach dem Komma),* mit der wir eine kleine Übungsaufgabe machen wollen.

10^0 = ist der Punkt 1

<u>WERTE auf der Strecke der Hochzahlen</u>

(Exponenten bzw. Logarithmen) zwischen 1 bis 10

[Die Kennziffer ist die Zahl vor dem Komma = hier: Null]

Mantisse Numerus

Zahl 1 = **0,**000 ↔ *(lg 1) = Null*

Zahl 2 = **0,**30102 ↔ (lg 2)

Zahl 3 = **0,**47712 ↔ (lg 3)

Zahl 4 = **0,**60206 ↔ (lg 4)

Zahl 5 = **0,**69897 ↔ (lg 5)

Zahl 6 = **0,**77781 ↔ (lg 6)

Zahl 7 = **0,**84509 ↔ (lg 7)

Zahl 8 = **0,**90308 ↔ (lg 8)

Zahl 9 = **0,**95424 ↔ (lg 9)

Zahl 10 = **1,**000 ↔ *(lg 10) =* ***1***

$10^{0,90308} = 8$ $10^{0,95424} = 9$ $10^{1} = 10$

Zahl 11 = **1,**0414 $10^{1,0414} = 11$

Zahl 12 = **1,**07918 $10^{1,07918} = 12$ *usw.*

Zahl 99 = **1,**99563 $10^{1,99563} = 99$

Zahl 100 = **2,**0 $10^{2} = 100$

Zahl 101 = **2,**00432 $10^{2,00432} = 101$

Zahl 200 = **2,**30102 $10^{2,30102} = 200$