Sekundarstufe

Wolfgang Schlottke
& Hans-J. Schmidt

# Pyramiden-volumen

## Lernen an Stationen

10 Stationen mit Methoden zur Berechnung des Volumens von Prismen und Pyramiden

Lernen mit Erfolg
KOHL VERLAG
www.kohlverlag.de

# PYRAMIDENVOLUMEN
## Lernen an Stationen

1. Digitalauflage 2016



Inhalt: Wolfgang Schlottke & Hans-J. Schmidt
Coverbild: © macrovector - fotolia.com
Grafik & Satz: Kohl-Verlag

**Bestell-Nr. P11 898**

**ISBN: 978-3-95686-432-2**

**www.kohlverlag.de**

# Inhaltsverzeichnis

# Didaktische, methodische und praktische Hinweise

## Allgemeine Vorbemerkungen

Dieses Stationenlernen wendet sich an Lehrer und Lehrerinnen aller Schulformen! Das Stationenlernen hat sich im Laufe der Jahre an allen Schulformen einen festen Platz erobert. Den vielen Vorteilen, wie z. B.

- selbstständiges Arbeiten
- eigenverantwortliches Lernen
- soziales Lernen mit Partnern
- individuelles Lerntempo
- Methodenvielfalt
- Motivation
- und Ähnliches

stehen natürlich auch gewisse Nachteile entgegen, wie z. B.

- Zeitaufwand zur Herstellung der Stationen
- Organisation
- Materialbeschaffung
- Bewertung
- und einiges mehr.

Das positiv gemeinte Argument, die Lernenden könnten sich den ihnen angemessenen Schwierigkeitsgrad selbst aussuchen, kann einer ernsthaften Prüfung nicht standhalten.
Denn ehe die Lernenden den Schwierigkeitsgrad der ihnen unbekannten Station erkannt haben, müssen sie einen großen Teil der Station schon durchgearbeitet haben. Das kann zu Frustration, aber auch Überheblichkeit gegenüber anderen Stationen führen. Insofern ist es sicher sinnvoller, die Anzahl der Stationen in zwei oder drei Schwierigkeitsklassen einzuteilen und eventuell dann die Lernenden vorsichtig in der Wahl ihrer Stationen zu beraten.
Das vorliegende Stationenlernen möchte die methodische Vielfalt der »Beweise« nutzen, um möglichst viele verschiedene Schwierigkeitsgrade auf möglichst vielen Lernniveaus für möglichst viele Schulformen anzubieten. Es geht also weniger um die Kenntnis einer Formel und deren Anwendung - das natürlich auch - als um die Art der Herleitung dieser Formel und die in diesen Herleitungen versteckten Probleme.
Da wir es in einer Lerngruppe mit z. T. sehr unterschiedlichen Stadien der Lernentwicklung zu tun haben, bieten die unterschiedlichen Ebenen der Lernmethoden in diesem Stationenlernen eine gute Möglichkeit, den vorgefundenen Entwicklungsstadien der Lernenden und deren spezifischen Eigenarten Rechnung zu tragen.

## Zusammenfassende Bemerkungen zu den Stationen

Die Stationen können methodisch im Wesentlichen in drei Gruppen eingeteilt werden:

1. Experimentelle Methoden (Stationen 1, 5 und auch 8)
2. Approximationsmethoden (Stationen 6A, 6B, 7A, 7B und auch 8)
3. Kompositionsmethoden (Stationen 2, 3, 4, 8)

Die ***experimentellen Methoden*** basieren auf dem Messen von Massen und Volumina der Prismen und zugehörigen Pyramiden. Dabei werden Hohlkörper gefüllt bzw. Vollkörper untergetaucht.
Die ***Approximationsmethoden*** benutzen Stufenpyramiden in verschiedenen Formen, einmal ein- und umbeschriebene Stufenpyramiden, zum anderen eine einzige Stufenpyramide, die die zu untersuchende Pyramide mit den Stufen durchdringt.

Die ***Kompositionsmethoden*** sind Spezialfälle, bei denen die Prismen aus verschiedenen Pyramiden unterschiedlicher Anzahl zusammengesetzt sind. Aus der Größe, Art und Anzahl der Pyramiden kann man dann Schlüsse auf das Volumen der speziellen Pyramiden ziehen. Da entsprechende Netze an die Stationen angehängt sind, lassen sich die Modelle herstellen. Sollten den Lernenden aus irgendwelchen Gründen keine Modelle zur Verfügung stehen, können auch die Schnittzeichnungen allein benutzt werden, um die entsprechenden Erkenntnisse zu gewinnen. Dieser Prozess stellt dann allerdings sehr hohe Anforderungen an das Raumvorstellungsvermögen der Kinder.

**Einige Bemerkungen zum Begriff »*Beweis*«**

Wir möchten diesen Begriff tunlichst vermeiden, weil er zu schillernd und auch durch die universitäre Ausbildung vorbelastet ist. Ein paar Bemerkungen müssen aber erlaubt sein.
Der Beweisbegriff erhält erst durch die Erkenntnisse der Entwicklungspsychologie und der Lerntheorie einen angemessenen Platz im schulischen Lernen. Er ist deshalb ein sehr relativer Begriff. Für Kinder der Klassen 5 sind z. B. Zählen und Messen selbstverständliche Beweismethoden, für Lernende der 7. Klassen sind Konstruktionsmethoden beweisfähig, aller technischen Ungenauigkeiten zum Trotz, aber in Klasse 12 kann man sich mit den o. g. Methoden natürlich nicht zufrieden geben, weil diese Schülerinnen und Schüler einen Entwicklungsstand erreicht haben, der sie zu allgemeinerem und abstrakterem Denken befähigt.
Die ***Textaufgaben*** in Station 9 wurden auf wenige - unserer Meinung nach - interessante Inhalte beschränkt.
Die Station 10, die Zuordnungen zwischen speziellen Spitzkörpern und deren entsprechenden Volumenberechnungsformeln behandelt, erfordert einiges an mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten und ein hohes Maß an Konzentration.
Die ***Hilfen***, die in den einzelnen Stationen zur Verfügung gestellt werden, sollten nicht als unabänderlich hingenommen werden. Je nach Leistungsfähigkeit sollte man den Lernenden die eine oder andere Hilfe versagen, aber auch umgekehrt auf weitere mögliche Hilfen durch die Lehrerinnen und Lehrer verweisen, die z. B. in zusätzlichen mündlichen Informationen bestehen. Es können auch »Experten« eingesetzt werden, Schülerinnen bzw. Schüler, die ihre besonderen Fähigkeiten bei Problemen an den Stationen einbringen. Ebenso können mathematische Schülerlexika zur Verfügung gestellt werden, deren Gebrauch aber vorher geübt werden muss.
Ehe man mit dem Stationenlernen beginnt, ist es ratsam, eine Reihe von Begriffen und Inhalten zu wiederholen. Dazu gehören:

- Der Satz des Pythagoras, auch in den Mehrfachanwendungen
- Äquivalenzumformungen
- Prismenformen
- Proportionalität
- Summation und Ausklammern von Termen
- Dreieckslehre
- evtl. Kreisfläche
- usw.

Bei der Einführung des Themas sollte als zentrales Problem bei der Volumenberechnung klar herausgestellt werden, dass diese deshalb mit den bisherigen Mitteln nicht durchgeführt werden kann, weil die Seitenflächen nicht senkrecht auf der Grundfläche stehen, zumindest nicht alle, und weil der Körper keine Deckfläche hat, sondern in einer Spitze endet.

Zu Beginn und zum Ende sollte man auf jeden Fall den Stuhlkreis wählen, um die Unmittelbarkeit des Gesprächs zu garantieren. Es dient natürlich dazu, um auf das Problem hinzuführen, aber nur um hinzuführen! Auch während des Stationenlernens kann eine Bestandsaufnahme zum Erkenntnisstand notwendig werden.
Für das zusammenfassende Endgespräch sollte man sich wirklich Zeit nehmen und die Lernenden eindringlich auffordern, ihre Meinung und Kritik anzubringen. Man sollte die Bedeutung des Endgesprächs klar herausstellen, damit die Lernenden die Überzeugung gewinnen, dass ihr eigener Beitrag als wichtig anerkannt wird. Wer kritisiert wird, der wehrt sich auch! Ein lapidarer Meinungsaustausch ist uneffektiv!
Die Stationen-Namenübersicht ist im DIN A3-Format besser im Klassenraum zu sehen, als nur im DIN A4. Mit einem roten Punkt, den nur der Lehrer verteilt, wird die Leistung der Lernenden auch »öffentlich« gemacht. Konkurrenz belebt das Geschäft.

**Praktisch-technische Hinweise**

Das Materialproblem beim Stationenlernen belastet die Kolleginnen und Kollegen außerordentlich stark.
Sind in der mathematischen Sammlung Modelle vorhanden, so sollte man vorher auf Vollständigkeit der benötigten Modellpalette achten. Meistens haben die Plastikmodelle kleine Öffnungen, durch die man Wasser mithilfe eines kleinen Trichters einfüllen kann.
Oft sind solche Modelle ziemlich klein, sodass Ungenauigkeiten beim Messen vorprogrammiert sind.
Sind keine geeigneten Körper in der Mathematiksammlung aufzutreiben, bleibt nur der Weg des Modellbastelns. Das kann für die Motivation der Lernenden aber von großem Vorteil sein. Da manuelle Fertigkeiten durchaus zum Lernzielkatalog von Schulen gehören, kann man den

- Kunst- bzw. Technikunterricht (wenn angeboten) mit solchen Aufgaben betrauen, wenn Absprachen z. B. in Konferenzen früh genug getroffen werden oder
- praktischen Teil, nämlich das Modellbasteln, in die Stunden vor dem geplanten Stationenlernen legen incl. Hausaufgaben und der Bewertung der Modellqualität mit einer Zensur.

Beim Erstellen der Pappmodelle sollten einige Dinge berücksichtigt werden.

**A.** Der Karton für die Modelle, die möglichst mehr als nur ein Stationenlernen aushalten sollten, sollte 250 bis 300 g/m$^2$ nicht unterschreiten. Das Modell hat dann genügend Steifigkeit, hält vielen Füllungen (Station 1) stand und beult sich beim Füllen mit Sand nicht aus. Farbiger Karton wäre sehr wünschenswert.

**B.** Je kleiner die Modelle sind, desto größer werden die relativen Messfehler. Man kann deshalb die mitgelieferten Netze mit einem Kopierer auf ein Verhältnis von 2 : 1 bzw. 1,5 : 1 strecken, wenn einem die Netze zu klein erscheinen. Ob das Verhältnis gerade so sein muss, wie vorgeschlagen, ist dabei nicht so wichtig. Man sollte die Vergrößerungsfähigkeit des Kopierers nutzen. Sollen keine Kopien gemacht werden, so können die Lernenden mit dem bekannten Durchstechverfahren die Netze auf Karton vervielfältigen.

**C.** Vor dem Knicken der Netze entlang der Kanten sollten die Kanten von außen leicht eingeritzt werden, damit sie sich besser umbiegen lassen. Besonders wichtig ist das für die Pyramidenspitzen.

KOHL VERLAG PYRAMIDENVOLUMEN ... Lernen an Stationen – Bestell-Nr. P11 898

**D.** Das Zusammenkleben der Netze zu den Körpern ist mit an den Netzen angehängten Falzen möglich, aber je nach Körper manchmal ungünstig, da die Falzen die Körperformen verändern können. Eine Innenfalz von nur 10 cm Länge und 1 cm Breite bei 300-g-Papier (0,4 mm Dicke) vermindert das Volumen um 0,4 $cm^3$. Das ist messbar! Besser ist es manchmal, die Körper mit 19 mm breitem »Tesa« zu kleben. Sind die Modelle fertig, so sind die Maße zu überprüfen. Wer lieber mit den Falzen arbeiten möchte, soll das natürlich tun; sie sind an den Netzen überall mit gezeichnet.
Zum Zusammenkleben von Kegeln und Zylindern ist jedoch ein Falz die bessere Lösung, weil der Falz den Körper bei der Rundung unterstützt. Klebt man Stoß auf Stoß, so entsteht eine Kante statt einer Rundung. Auf keinen Fall den Falz einritzen, sonst ist der Stabilisierungseffekt weg.
Beim Zusammenkleben der Netze sollten zuerst die kleinen Flächen geklebt werden, damit man den »Tesa« gut von innen andrücken kann, solange noch Platz vorhanden ist.

Bei großen Flächen hat man mehr »Arbeitsplatz«. Das Zusammenkleben der Spitzen ist besonders schwierig. Ein schmaler gerader Gegenstand, z. B. eine Schere, nutzt beim Andrücken von innen sehr.
Noch ein »Problem«. Beim Füllen der Modelle verlieren diese schon einmal ihre Form, da die Lernenden sie zu stark festhalten. Damit ändert sich das Volumen. Bei großen Körpern ist das schlimmer als bei kleinen. Bei den Spitzkörpern ist das auch gravierender als bei den Prismen, weil bei den Spitzkörpern die formstabilisierende Grundfläche fehlt, die bei den Prismen vorhanden ist.
Abhilfe:
Man stellt den Spitzkörper mit der offenen Fläche auf einen Karton und umrandet die fehlende Körperfläche mit einem spitzen! Bleistift. Dann zeichnet man einen ca. 1 cm breiten Rand um diese Grundfläche. Die größere Grundfläche wird ausgeschnitten, die innere Grundfläche auch. Den Spitzkörper klebt man in diesen Rand, der ja nur ein klein wenig größer ist als die leere Grundfläche des Spitzkörpers. Diesen außen stabilisierenden Rand klebt man am besten mit einem schnelltrocknenden Verdunstungskleber an die Öffnung des Spitzkörpers.

**E.** Zum Füllen der vorhandenen Plastikkörper eignet sich natürlich Wasser. Die »Planschereien« halten sich im Allgemeinen in Grenzen.
Bei den Pappmodellen eignet sich feiner Sand, z. B. Vogelsand, den man an der Öffnung glatt streichen kann.

**F.** Manche Lernende stören sich vielleicht an der Tatsache, dass der Sand Hohlräume besitzt und evtl. so die Messung beeinträchtigt. Das ist aber nur ein Scheinproblem, da die Hohlräume gleichmäßig im Sand verteilt sind und auch in der Summe proportional zum Gesamtvolumen stehen. Das »Problem« hebt sich also bei der Volumenmessung von selbst auf.

**G.** Bei kleinen Modellen, die mit Flüssigkeit gefüllt werden, lässt sich ein Problem kaum vermeiden, die Tropfen nämlich, die beim Ausgießen im Modell hängen bleiben. Da die inneren »Oberflächen« von Spitzkörpern und zugehörigen Prismen nicht im Verhältnis 1 : 3 stehen, ist der Massen- bzw. Volumenverlust durch die Tropfen für die Lernenden nicht zu vergleichen. Da die Lernenden im Schätzen hier ungeübt sind, bleibt als einziger Ausweg das Wiegen im benetzten und unbenetzten Zustand. Sand ist also die bessere Alternative.

KOHL VERLAG PYRAMIDENVOLUMEN ... Lernen an Stationen – Bestell-Nr. P11 898

# Didaktisch-methodische Hinweise zu den Einzelstationen

**Parcours 1:**

**Sandkasten- und Wasserspiele**

Die Station 1 ist einfach durchzuführen, hat aber trotzdem wegen der Vielfalt der Modelle und der Verschiedenheit der beiden Methoden - Beispiel <-> Gegenbeispiel - einen starken Überzeugungscharakter. Der Wechsel von Denk- und Handlungsebenen in einem selbst durchgeführten Experiment verstärkt die Gewissheit über die eigenen Erkenntnisse. Diese werden durch die Bildhaftigkeit der Tabelle und die Übersichtlichkeit der Ergebnisse auf der ikonischen Ebene gestützt.
Zu dieser Station gehören 7 Modellpaare. Die große Anzahl von Modellkörpern soll gewährleisten, dass die Schüler einsehen können, dass die auf breiter Erkenntnisebene gefundenen Vermutungen und Ergebnisse wahrscheinlich allgemeiner gelten, als wenn sie nur bei einem Körperpaar zustande gekommen wären. Die Ergebnisse werden nicht nur durch die verschiedenen Formen, d. h. verschiedene Grundflächen und Höhen, sondern auch durch das Beispiel einer schiefen Pyramide gesichert.
Die beiden Gegenbeispiele, gleiche Grundflächen und verschiedene Höhen bzw. verschiedene Grundflächen und gleiche Höhen, stützen die Schülervermutungen noch auf ganz andere Weise. Da Gegenbeispiele im Mathematikunterricht im Allgemeinen keine so große Rolle spielen, ergibt sich hier für den Lernenden ein weiteres methodisches Mittel, das man im Unterricht aufgreifen sollte.
Um die Vielzahl der Formen und Ergebnisse übersichtlich zu gestalten, ist eine vorgefertigte Tabelle von großem Nutzen, dient dem schnelleren Überblick und entlastet die Lernenden. Um Verwechselungen bei so vielen Körpern zu vermeiden, ist es unbedingt notwendig, die zusammengehörigen Modellpaare mit gleichen Nummern zu versehen.
So sinnvoll auch die Vielzahl der verschiedenen Modelle sein mag, so sollte man auf der anderen Seite nicht übersehen, dass eine scheinbar so gesicherte Erkenntnis über den Zusammenhang der Volumina von Prismen und entsprechenden Spitzkörpern unter Umständen dazu führen kann, dass die Motivation der Lernenden, weitere Stationen zu bearbeiten, nicht verstärkt wird.

Die Gegenbeispiele sind die Körperpaare 4 und 7.

**Parcours 2:**

**Sechslinge und ein Würfel**

Da ein »allgemeiner« Beweis über die Formel zum Volumen eines Spitzkörpers nicht durchgeführt werden kann, irgendwelche Voraussetzungen müssen ja immer gegeben sein, bleibt in der Regel nur die Benutzung von Spezialfällen übrig, auf deren Grundlage man dann weiter sieht. Das sollten die Lernenden immer vor Augen haben!
Diese Station 2 benutzt nun einen ganz besonderen Spezialfall. Für die Lernenden mag die hier angeführte Begründung etwas »anfällig« sein, da man vom ganzen Würfel auf den halben übergeht, um die Argumentation zu Ende führen zu können. Es bleiben am Ende nur drei Pyramiden für die Herleitung der Volumenformel übrig. Das hat aber mit der Schlüssigkeit der Begründung nichts zu tun.

KOHL VERLAG PYRAMIDENVOLUMEN ... Lernen an Stationen – Bestell-Nr. P11 898

# Stationenlernen: Rund um das Pyramidenvolumen

Wichtig ist außerdem, dass die Lernenden die sechs Pyramiden als Netz zusammengeklebt zum Hantieren zur Verfügung haben.
Die Betrachtung des halben Würfels soll in zwei Stufen ablaufen:

1. Die Lernenden erhalten nur das Kantenbild des halben Würfels, damit sie ihre räumliche Vorstellungskraft trainieren. Erst, wenn sie damit bei der Lösung nicht erfolgreich sein sollten, erhalten sie
2. das zweite Modell mit den vier halben Pyramiden und einer ganzen Pyramide.

Um Chaos bei den vielen Teilen zu vermeiden, sollten die beiden Modellgruppen
a) die sechs Pyramiden bzw.
b) die Einzelpyramide mit den vier halben Pyramiden
aus verschiedenfarbigem Karton gefertigt sein.
Beim Zusammenkleben der Flächen ist es ratsam, zuletzt eine Seitenfläche zu verkleben. Hat man nämlich drei Seitenflächen mit der Grundfläche schon zusammengeklebt, so ist dieser noch offene Körper schon recht formstabil, sodass man die letzte Fläche gut andrücken kann. Statt mit den Klebefalzen arbeitet man hier besser mit »Tesafilm« oder klebt die letzte Kante mit schnelltrocknendem Kontaktkleber zusammen.

Da die Station 3 eine Verallgemeinerung von Station 2 ist, sollten die Lernenden die Stationen 2 und 3 hintereinander verpflichtend bearbeiten, denn in Station 3 wird aus dem Würfel ein Quader.

**Parcours 3:**

**Aus drei mal zwei mach eins**

Diese Station ist eine Verallgemeinerung der Station 2, da hier der Würfel durch einen Quader ersetzt wird. Die Lernenden erfahren also eine Formänderung, bei der aber die Beweismethode die gleiche ist. Um den halben Quader zu »durchschauen«, sollten unbedingt die beiden räumlichen Kantenzeichnungen zur Verfügung stehen. Ein »Puzzle« aus einer Einzelpyramide und den vier halben Pyramidenmodellen kann dagegen entfallen, denn das Modell können die Lernenden aus Parcours 2 übertragen. Natürlich bleibt es den Kolleginnen und Kollegen unbenommen, diese Modellgruppe herzustellen. Die Netze sind bei der Station aufgezeichnet.
Wenn jemand viel Zeit hat, kann man ein räumliches Körpermodell zeichnen, bei dem die verschiedenen Pyramiden farblich abgesetzt und die Kanten in den entsprechenden Farblinien knapp nebeneinander gezeichnet sind. (Schülerhausaufgabe?)

**Parcours 4:**

**Aus drei mach eins**

Diese Station ist für die Lernenden auf den ersten Blick sehr einsichtig. Man sieht doch sehr gut, dass die drei Pyramiden in allen Stücken nämlich: Eckenzahl, Kantenlängen, Flächenformen und -inhalten übereinstimmen. Man kann sogar die Kantenlängen und Flächeninhalte mit dem Satz des Pythagoras und der Flächenformel für die Dreiecksinhalte ausrechnen. Dann ist also für den Lernenden »völlig klar«, dass die drei Volumina auch gleich sein müssen. Woran soll man denn eine mögliche Ungleichheit auch festmachen? Wie habe ich mir das vorzustellen? Das ist eine starke Frage, wie soll man die beantworten? Überzeugend natürlich! Hier bleibt nur die Flucht nach vorn. Die »Indizien« für die Gleichheit der drei Volumina sind erdrückend. Deshalb soll zumindest als »Legitimierung« am Ende mit einem Zahlenbeispiel berechnet werden, dass die Volumenformel stimmt.

KOHL VERLAG PYRAMIDENVOLUMEN ... Lernen an Stationen – Bestell-Nr. P11 898

Ein Beweis ließe sich mithilfe des Satzes von Cavalieri durchführen, den die Lernenden zu dieser Zeit mit großer Sicherheit nicht kennen. Diesen Satz vorher extra herzuleiten, wäre natürlich völlig überzogen und die Lernenden würden die Notwendigkeit eines so allgemeinen Satzes angesichts eines so eindeutigen Sachverhalts auch gar nicht einsehen. Manchmal ist weniger eben mehr.

**Parcours 5:**

**Tauchstation**

Das Eintauchen der beiden Vergleichskörper führt zu einer scheinbaren Volumenvergrößerung des Wassers in der pneumatischen Wanne. Diese Volumenvergrößerung des Wassers, das Volumen des Tauchkörpers, realisiert sich in einem Quader aus Wasser, dessen Grund- bzw. Deckfläche mit der Querschnittsfläche der pneumatischen Wanne übereinstimmt und bei der die Höhenzunahme gemessen werden muss. Natürlich kann die pneumatische Wanne auch jede andere gerade Form haben, solange die Form der Grundfläche für die Kinder berechenbar ist. Das kann dann auch eine Kreisfläche sein, wenn die Wanne also ein Zylinder ist. Hat man ein Überlaufgefäß mit einem Ablaufrohr zur Verfügung, so kann man die Berechnung der Volumenzunahme des Wassers in der pneumatischen Wanne vermeiden und dieses Überlaufvolumen direkt mit einem Messbecher bestimmen, den man unter den Überlauf stellt. Der Vergleich der beiden Überlaufvolumina führt sofort zur Formel. Hat man keinen Messbecher, so lassen sich die Volumina auch wiegen.
Bei den zur Verfügung gestellten Modellpaaren sollte auch auf Vielfältigkeit geachtet werden, d. h., Variation in den Maßen und den Formen, ähnlich wie in Station 1.
Verfügt man über keine geeigneten Vollkörper, so kann man die entsprechenden Hohlkörper verwenden, wenn man die beiden Ausgusslöcher verklebt. Häufig haben die Hohlkörper Stege, die der Versteifung dienen. Das ist nicht schlimm, denn die Stege befinden sich in beiden Körpern und außerdem geben die Stege Anlass, über Ungenauigkeiten zu diskutieren, um diese dann abzuschätzen.
Sollen Vollkörper selbst hergestellt werden, so ist das mühsam, erfordert viel Geschick, Zeit und ordentliche Maschinen, wenn man Holz verwendet. Wenigstens braucht man hier nicht auf die Homogenität des Materials zu achten, wie beim Wiegen von Körpern. Wohl der Schule, die einen Werklehrer hat. Eine andere Möglichkeit, auch aufwändig, besteht darin, Modell aus Karton mit Epoxidharz o. Ä. auszugießen, die man in Sand gestellt hat, damit die Form sich nicht verändert. Es gibt aber auch Verlage, die solche Körper anbieten; ein Geldproblem.

**Parcours 6A/6B:**

**Durch Schachteln zur Klarheit • Noch allgemeiner schachteln**

Bei diesem sehr einsichtigen Näherungsverfahren führt die Lösung des Problems über vier Schritte:

1. Berechnen des Volumens der umbeschriebenen Stufenpyramide
2. Berechnen des Volumens der einbeschriebenen Stufenpyramide
3. Bildung des Durchschnitts beider Volumina aus 1. und 2.
4. Vergleich der Volumina von Stufenpyramide und entsprechendem Prisma

Die Wichtigkeit dieses Parcours besteht im Wesentlichen darin, den Lernenden zeigen zu können, dass die hier angewandte Methode beliebig verfeinert und somit mein Ergebnis beliebig genau berechnet werden kann. Mit anderen Worten, man kommt dem »richtigen« Ergebnis so nahe wie man will, erreicht es aber unter Umständen nie. Im Hinblick auf die Gewinnung der Formeln von Kreisumfang und -fläche haben die Näherungsmethoden erhebliches Gewicht.

KOHL VERLAG PYRAMIDENVOLUMEN ... Lernen an Stationen – Bestell-Nr. P11 898

Die Annäherung an die Zahlen z. B. ein Drittel oder $\pi$ kann gut demonstriert werden. Der Hinweis, dass Großrechner ein Vierteljahr lang rechnen, um $\pi$ auf Milliarden von Stellen zu berechnen und immer noch unendlich viele Stellen danach fehlen, beeindruckt die Lernenden schon.
Das Eingehen auf die Verfeinerung bringt zwar den Lernenden den Begriff des »Unendlichen« näher, aber ein Grenzübergang kann so nicht erarbeitet werden, er muss im Anschaulichen stecken bleiben. Die Möglichkeit der Anschauung sollte man aber nutzen. Das kann schon ganz einfach geschehen, indem man zuerst die gebastelte Stufenpyramide vorführt, dann einen Stapel von schräg geschichteten Kartonblättern (100 Blätter genügen) und zum Schluss einen schräg verschobenen Stapel von Transparentpapier zeigt (1000 Blatt).
Hier muss man schon eine Lupe nehmen, um die Stufen zu erkennen. Achtung: nicht zu stark schrägen, sodass man die einzelnen Blätter sieht. So eine Vorführung wirkt stark nach. Dieser optischen Verfeinerung kann eine mathematische zur Seite gestellt werden:

$$0{,}\overline{9} = 1 \qquad 0{,}\overline{3} = \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{n} \Rightarrow 0 \qquad \frac{1}{\frac{1}{n}} \Rightarrow \text{unendlich} \qquad \text{usw.}$$

Es können durchaus Grenzen erreicht werden, wie die beiden ersten Beispiele zeigen. Schade, dass das Thema Folgen und Reihen aus der Sekundarstufe I herausgefallen ist. So lohnend solche Betrachtungen auch sein können, sie kosten Zeit. Das muss in die Entscheidung jedes einzelnen Lehrers gelegt werden.
Die drei Blätter

Pyramide, I
einbeschriebene Stufenpyramide, II
umbeschriebene Stufenpyramide, III

müssen als Folie vorliegen, sonst ist der »Trick« für die Lernenden nicht nachvollziehbar, wenn man die Folien übereinander legt.
Das Bild der Stufenpyramide aus Station 6A sollte auch bei Station 6B vorliegen.

**Parcours 7A/7B:**

**Und jetzt auch noch Stufen mittendrin • Stufen mittendrin und das noch allgemein**

Dieses Näherungsverfahren ist eine »Mischung« der Methode der um- und einbeschriebenen Stufenpyramide von Station 6A/6B, so scheint es jedenfalls. Doch es gibt gravierende Unterschiede, die die Lernenden sehen müssen, z. B. dass die Grundflächen von eigentlicher Pyramide und Stufenpyramide nicht übereinstimmen oder dass hier nur eine Stufenpyramide benutzt wird. Dafür ist der Aufbau der Pyramide komplizierter, wie man aus Blatt 2 entnehmen kann. Verdoppelt man die Stufenzahl, so ist die Annäherung viel effektiver als bei den Stationen 6A/6B, weil mehr »überflüssiges« Material wegfällt. Diese Näherungsmethode ist also qualitativ besser. Auf Abbildung Blatt 3 ist das zeichnerisch dargestellt. Auf solche Feinheiten kann man in der Abschlussbesprechung eingehen, indem man den Lernenden, die beide Stationen, also 6 und 7 bearbeitet haben, dieses Problem des qualitativen Methodenvergleichs auf einem Arbeitsblatt anbietet.

**Parcours 8:**

**Ein Puzzle - von oben nach unten einkreisen**

Diese Station soll den Lernenden vornehmlich zeigen, dass es häufig erst einmal genügt, einen gesuchten Wert mehr oder weniger grob abzuschätzen, um einen Anhaltspunkt für seine Größe zu erhalten. Man muss ihnen dabei bewusst machen, dass diese »Ungenauigkeit« nichts Minderwertiges ist, sondern dass diese Methode des Herantastens nicht nur in der Mathematik sehr verbreitet ist. Auch im Alltag sind solche Ungefähraussagen überall

gebräuchlich. »Die Reparatur wird etwa 100 € kosten«, »So um sieben Uhr werde ich ankommen« usw.. Dass bei diesem Parcours die Werte »ein Viertel« bzw. »ein Halb« als untere bzw. obere Grenze erreicht werden, liegt an der Art der Zerlegung des Prismas, ist also mehr oder weniger Zufall. Der richtige Wert »ein Drittel« wird natürlich damit suggeriert. Der Schüler/die Schülerin muss selbstverständlich wissen, dass unendlich viele Bruchzahlen zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ liegen. Da hilft die fortschreitend halbierende Einteilung auf dem Zahlenstrahl zwischen den Markierungen von $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$. Obwohl es sich hier nur um ein Puzzle handelt, ist die logische Begründung streng.
Dass die Einteilung des Prismas in die Teilkörper vorgegeben ist soll helfen, Zeit zu sparen. Die Lernenden könnten einen Styroporblock auch selber zerteilen und Teilkörper zu finden versuchen, aber die Ergebnisse werden eher zufällig sein. Eine solche Methode verlangt aber, dass ich schon gewisse Vorstellungen von den zu findenden Teilkörpern haben muss, damit die Sucherei nicht nur dem Zufall überlassen ist.

**Parcours 9:**

**Ein paar interessante Probleme im Text**

Bei den Anwendungsaufgaben haben wir uns etwas zurückgehalten. Viele Aufgaben aus den Schulbüchern haben einen rein mathematischen Hintergrund. Solche mathematischen Inhalte lassen sich leichter finden, ein Realitätsbezug zu unserer Lebenswelt ist aber seltener gegeben. Wir haben uns deshalb bemüht, keinen Realitätsbezug zu »konstruieren«.
Bei einem Kirchendach mit Pyramidenform interessiert nicht das Volumen, sondern die Größe der Mantelfläche. Das ist nun einmal so!
Für interessante Anregungen und Aufgaben sind daher die Autoren sehr dankbar!

**Parcours 10:**

**Beziehungskiste: Der Körper und seine Formel**

Dieser Parcours ist wirklich nicht einfach, denn es werden gute mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten gebraucht. Da Umformungen und Vereinfachungen von Termen und Gleichungen gefordert werden, können die Ergebnisse der Lernenden von denen auf dem Kontrollblatt durchaus abweichen, wenn z. B. nicht bis zum Ende gekürzt wurde oder Vereinfachungen als nicht notwendig angesehen wurden. Deshalb ist die Kontrollstation, Lehrer/Lehrerin, unbedingt notwendig. Man sollte auch die Möglichkeit in Betracht ziehen, die Lernenden nur jede zweite Aufgabe bearbeiten zu lassen oder die Auswahl der Aufgaben ganz den Lernenden überlassen. Da schon leichte mathematische Fehler bei der Bearbeitung zur Frustration führen können, ist hier eine engere fachliche und psychologische Betreuung notwendig. Auch ein Eingreifen zum Abbruch kann nützlich sein, um die Motivation nicht auf Null fallen zu lassen.