34

Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik

Birgit Brandt, Kerstin Tiedemann (Hrsg.)

Mathematiklernen aus interpretativer Perspektive I

Aktuelle Themen, Arbeiten und Fragen

WAXMANN

Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik

herausgegeben von

Aiso Heinze und
Marcus Schütte

Band 34

Editorial

Der Mathematikunterricht steht vor großen Herausforderungen: Neuere empirische Untersuchungen legen (erneut) Defizite und Unzulänglichkeiten offen, deren Analyse und Behebung einer umfassenden empirischen Erforschung bedürfen. Der Erfolg derartiger Bemühungen hängt in umfassender Weise davon ab, inwieweit hierbei auch mathematikdidaktische Theoriebildung stattfindet. In der Reihe „Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik" werden dazu empirische Forschungsarbeiten veröffentlicht, die sich durch hohe Standards und internationale Anschlussfähigkeit auszeichnen. Das Spektrum umfasst sowohl grundlagentheoretische Arbeiten, in denen empirisch begründete, theoretische Ansätze zum besseren Verstehen mathematischer Unterrichtsprozesse vorgestellt werden, als auch eher implementative Studien, in denen innovative Ideen zur Gestaltung mathematischer Lehr-Lern-Prozesse erforscht und deren theoretischen Grundlagen dargelegt werden. Alle Manuskripte müssen vor Aufnahme in die Reihe ein Begutachtungsverfahren positiv durchlaufen. Diese konsequente Begutachtung sichert den hohen Qualitätsstandard der Reihe.

Birgit Brandt,
Kerstin Tiedemann (Hrsg.)

Mathematiklernen aus interpretativer Perspektive I

Aktuelle Themen, Arbeiten und Fragen

Waxmann 2019
Münster · New York

Bibliografische Informationen der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Band 34

Print-ISBN 978-3-8309-3975-7
E-Book-ISBN 978-3-8309-8975-2

www.waxmann.com
info@waxmann.com

Umschlaggestaltung: Christian Averbeck, Münster
Titelbild: © candy1812 – Fotolia.com
Satz: Stoddart Satz- und Layoutservice, Münster
Druck: CPI Books GmbH, Leck

Gedruckt auf alterungsbeständigem Papier, säurefrei gemäß ISO 9706

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC www.fsc.org
FSC® C083411

Printed in Germany

Inhalt

Birgit Brandt und Kerstin Tiedemann

Vorwort

2008 haben Helga Jungwirth und Götz Krummheuer den bisher letzten Sammelband zur Interpretativen Forschung herausgegeben. In ihrem einleitenden Beitrag „Banal sozial? Zur Soziologisierung des mathematischen Lehrens und Lernens durch die interpretative Unterrichtsforschung" (S. 7–18) laden sie dazu ein, die Interpretative Forschung in ihren methodologischen und methodischen Prinzipien kennenzulernen, anhand von Einzelarbeiten ihre Ergebnisse in den Blick zu nehmen und das spezifisch Soziologische dieser Forschungsrichtung als Bereicherung und Begrenzung gleichermaßen zu verstehen. Wer durch die interpretative Brille auf den Mathematikunterricht blickt, der versteht ihn als Alltag, als ein interaktionales Geschehen zwischen Lernenden und Lehrenden, als „banal sozial".

Zwischen diesen Zeilen aus dem Jahr 2008 ist deutlich zu lesen, wie die bundesdeutsche Bildungsdiskussion damals noch immer um eine angemessene Reaktion auf internationale Vergleichsstudien ringt. Man ist unzufrieden mit den Produkten, die beispielsweise PISA dem deutschen Mathematikunterricht zugeschrieben hat, und möchte den Mathematikunterricht verändern. Als Beitrag zu dieser teilweise hitzig geführten Diskussion bringen Jungwirth und Krummheuer ein Verständnis von „theoria" zum Klingen, dessen Ton auch heute noch hörbar ist, so man denn hinhört: Herodot berichtet über den antiken Politiker und Lyriker Solon, dass dieser „um der Theorie willen" auf Reisen gegangen sei, ohne spezielle Absichten, ohne besonderes Ziel, ohne voreilige Beschränkung des Betrachtens (Jungwirth und Krummheuer, 2008, S. 8).

Dementgegen arbeiten interpretative Forscherinnen und Forscher keinesfalls ohne spezielle Absichten und ohne besonderes Ziel und doch finden sie in Solon in bestimmter Hinsicht einen Partner im Geiste. Die Interpretative Forschung betrachtet den Mathematikunterricht so, wie er sich ganz konkret im Alltag vollzieht – mit allen spontanen Einsichten, fachlichen Ungenauigkeiten und gemeinsam produzierten Klärungen. Sie löst das Mathematiklernen nicht aus seiner sozialen Einbindung des Klassenzimmers, sondern zeichnet nach, wie es sich genau dort Schritt für Schritt in Auseinandersetzung mit der jeweiligen sozialen und dinglichen Umwelt vollzieht. Auf diese Weise werden die Entstehungsprozesse von – in nationalen wie internationalen Vergleichsstudien – ‚gemessenen' Produkten zugänglich. Durch das verstehende Nachvollziehen von tatsächlich ablaufenden Interaktionsprozessen können Ansatzpunkte für gewünschte Veränderungen identifiziert werden: Wie ‚funktioniert' der Mathematikunterricht im Alltag eigentlich? Und wo genau können Veränderungen da ansetzen? So könnte man mit Jungwirth und Krummheuer formulieren: Wer den Mathematikunterricht verändern möchte, der sollte ihn zuallererst verstehen. Das ist das Solon'sche Klingen der Interpretativen Forschung: Verstehen, um zu verändern.

11 Jahre und 11 Artikel später liegt nun ein neuer Sammelband vor, der erneut dazu einlädt, genau hinzuhören – „um der Theorie willen". Dabei hat sich die mathematikdidaktische Geräuschkulisse in den Jahren verändert. So gilt in der Bundesrepublik Deutschland beispielsweise seit 2009 die UN-Behindertenrechtskonvention, womit Deutschland sich u.a. dazu verpflichtet hat, ein inklusives Bildungssystem zu gestalten. Die Hochschulrektorenkonferenz und die Kultusministerkonferenz beschreiben dafür als neue Zielperspektive eine „Schule der Vielfalt", in der alle Lernenden bestmöglich gefördert werden (HRK und KMK, 2015, S. 2). Und mit allen Lernenden geraten ganz explizit auch Differenzlinien jenseits von Behinderungen im Sinne der Behindertenrechtskonvention in den Blick, so z.B. kulturelle und religiöse Orientierungen, soziale Lebensbedingungen, Geschlecht, besondere Begabungen und die Sprache. Dieses umfassende Verständnis von Diversität hat gerade im Jahr des Erscheinens der zitierten Empfehlung noch einmal an Bedeutung gewonnen, als im Sommer 2015 die Zahl der in Deutschland ankommenden Flüchtlinge drastisch anstieg. Zuletzt ist diese Zahl wieder gesunken und doch stellt sich seither die wiederum neue Frage, wie die zahlreichen Flüchtlingskinder, die in Deutschland grundsätzlich das Recht haben, eine Schule zu besuchen, in ihrer Teilhabe am Unterricht unterstützt werden können. Man könnte die Liste fortsetzen und doch reicht dieses grobe Schlaglicht aus, um zu erkennen, dass auch der gegenwärtige Mathematikunterricht unter einem „Veränderungsdruck" steht (Jungwirth und Krummheuer, 2008, S. 7). Die neuen Fragen mögen dringend und laut sein; nichtsdestotrotz mag es die mathematikdidaktische Forschung auch im Jahr 2019 bereichern, das Klingen zu vernehmen: Verstehen, um zu verändern. Ja, der interpretative Zugang ist begrenzt, aber er hilft beim Verstehen, beim Sortieren und beim empirisch fundierten Entwickeln sinnvoller Veränderungsvorschläge – auch und gerade in Zeiten der (notwendigen) Veränderung.

In diesem Sinne sind in diesem Band neuere Arbeiten, die das verstehende Nachvollziehen des Mathematiklernens und -lehrens als eine Form der alltäglichen Interaktion umsetzen, versammelt. Jede Leserin und jeder Leser ist eingeladen, ganz unterschiedliche Stimmen anzuhören und dann nach interpretativer Tradition selbst zu entscheiden, inwiefern das Gehörte Resonanz in der eigenen Arbeit finden kann und soll (vgl. Naujok, 2000, S. 33). Was gibt es zu hören?

Problemlösen – Entdecken – Argumentieren: mathematische Aktivitäten im Fokus

Die Interpretative Forschung hat seit jeher Prozesse im Blick. Doch seit die Kultusministerkonferenz es den Bundesländern aufgetragen hat, sie in Form von prozessbezogenen Kompetenzen auch ganz explizit in den jeweiligen curricularen Vorgaben für den Mathematikunterricht zu verankern, gehören sie mit noch größerer Selbstverständlichkeit zum Ensemble. Es gilt, sie in unterschiedlichen Stücken des alltäglichen Mathematikunterrichts immer neu zu hören. Die folgenden drei Artikel bieten eine Interpretation von mathematischen Aktivitäten im Fokus.

- Mit *Marcus Nührenbörger* und *Ralph Schwarzkopf* wird der Band in doppelter Weise polyphon eröffnet. Sie verzahnen erstens inhaltsbezogene und prozessbezogene Kompetenzen und fokussieren im Mathematikunterricht der Grundschule auf ein „argumentierendes Rechnen". Dabei wird in substanziellen Lernumgebungen zur Arithmetik gerade durch die Förderung des Argumentierens stets auch die Stimme der Algebra gehört. Zweitens stellen die Autoren ihre Arbeit explizit in die Tradition der Design Research, wodurch sowohl die Konstruktion substanzieller Lernumgebungen als auch die Rekonstruktion beobachteter Interaktionsprozesse zu Gehör gebracht werden. Dabei zeigt sich der Mathematikunterricht als sozialer Prozess durchaus auch mit einer gewissen Autonomie gegenüber der Substanz der verwendeten Lernumgebung. Gerade in dieser Mehrstimmigkeit helfen die Autoren, Lernchancen deutlich herauszuhören.
- *Jessica Kunsteller* entdeckt, wie Grundschulkinder Zusammenhänge in und zwischen Rechenpäckchen entdecken, und vollzieht dabei insbesondere nach, wie in diesem Prozess Ähnlichkeiten im Wittgenstein'schen Sinne genutzt werden. So wird deutlich, dass nicht jedes Nutzen von Ähnlichkeiten hilfreich ist und Ähnlichkeiten einander auch gar nicht immer ähnlich sind (sondern unterschiedliche Arten von Ähnlichkeiten zu unterscheiden sind). Die Autorin sortiert die Ähnlichkeiten und bestätigt in diesem neuen Zusammenhang die alte Einsicht von Heinrich Bauersfeld, dass „kein Lehrer vor der Kreativität seiner Schüler sicher" ist (zitiert nach Neth & Voigt, 1991, S. 108).
- *Anna-Christin Söhling* untersucht den Prozess des Problemlösens ganz explizit in seiner sozialen Eingebundenheit, wenn sie fragt, wie vorab vorbereitete Hilfestellungen den Problemlöseprozess von Lernenden beeinflussen (können). Dazu entfaltet sie die Peirce'sche Argumentationslogik und verortet die bereitgestellten Hilfen zwischen unfertiger Deduktion und vorbereiteter Abduktion, die sich die Lernenden für die Anwendung im Lösungsprozess zu eigen machen müssen. Auf dieser Basis entwickelt sie für Lehrkräfte eine spannende Leitlinie, wie Hilfestellungen für das Problemlösen sinnvoll gestaltet werden können.

Gemeinsames Lernen – Inklusion

Die Frage nach einem gemeinsamen Lernen in einer „Schule der Vielfalt" zielt in den Kern des aktuell wahrnehmbaren Veränderungsdrucks für den Mathematikunterricht. Denn in einem inklusiven Mathematikunterricht sollen Lernende nicht nur individuell bestmöglich gefördert werden, sondern eben auch gemeinsam lernen. Dabei ist ein gemeinsames Lernen immer auch ein Lernen in Interaktion. Wie aber kann das im Mathematikunterricht gelingen? Die folgenden drei Beiträge identifizieren Chancen im Stimmenwirrwarr der Inklusion.

- *Michael Meyer* und *Simeon Schlicht* fragen nach einer konkreten Gestaltungsmöglichkeit für inklusiven Mathematikunterricht und adaptieren zu diesem Zweck den religionspädagogischen Ansatz der Elementarisierung. Sie entwickeln daraus konstruktiv eine Unterrichtseinheit zur halbschriftlichen Multiplikation und untersuchen deren Erprobung im Unterricht rekonstruktiv im Hinblick auf auftretende Lernchancen für *alle* Kinder. So entsteht das Angebot, vergleichsweise große Deutungsspielräume von Schüleräußerungen auf dem interpretativen Ohr zu hören und damit einen neuen Zugang zu einem gemeinsamen mathematischen Lerngegenstand zu finden.
- *Judith Jung* lotet Möglichkeiten für Lernprozesse durch Kooperation am gemeinsamen Gegenstand aus und vergleicht dabei insbesondere Interaktionsprozesse von leistungshomogen und leistungsheterogen zusammengesetzten Kleingruppen. An einer offenen Aufgabe zeigt sie auf, wie die Gruppen jeweils ihren eigenen Aushandlungsfokus mit individuell unterschiedlichen Lernermöglichungen finden. In diesem Zusammenhang findet die Autorin ihre ganz eigene Antwort auf die Frage, ob die vielfach erhoffte Lernförderlichkeit von Gruppenarbeiten unbedingt an das Auftreten expliziter Streitigkeiten mit konträren Argumenten gebunden ist.
- *Marei Fetzer* verstärkt in der Diskussion um ein gemeinsames Lernen im Mathematikunterricht eine besondere Stimme, die der Objekte. Sie versteht Objekte als Akteure und zeichnet anhand von kollektiven Lernsituationen nach, welche Rollen diese Objekt-Akteure auf unterschiedlichen Ebenen spielen können. Die Stimme der Objekte mag zunächst dissonant erscheinen; wer sich mit Marei Fetzer aber einmal auf sie konzentriert, kann ihre Eigenheiten leicht heraushören und über ihren Beitrag zum interaktionalen Geschehens des Mathematiklernens neu nachdenken.

Sprache

Die Sprache zeigt sich in der quantifizierenden Forschung immer deutlicher als ein wesentlicher Einflussfaktor für Mathematikleistungen und wird durch Fragen der Inklusion und Mehrsprachigkeit nur relevanter. Wie aber realisiert sich dieser Einfluss in konkreten Interaktionsprozessen? Verstehen, um zu verändern. Das bedeutet im Zusammenhang der Sprache vor allem: Verstehen, um zielgerichtet fördern zu können. Die folgenden drei Beiträge hören ganz genau hin, wenn über Mathematik gesprochen wird.

- *Kerstin Tiedemann* und *Thomas Rottmann* untersuchen, wie Grundschulkinder im Prozess der Strategieentwicklung Materialhandlungen am Rechenrahmen beschreiben. Dabei zeigen sie, dass die sprachdidaktische Einsicht, dass jede Beschreibung eine Identifizierung des jeweils Relevanten voraussetzt, mathematikdidaktisches Verstehen bereichern kann. So lässt sich an Beschreibungen von Materialhandlungen zu einem bestimmten Aufgabentyp nachvollziehen, wie sich das beschreibende Kind unterschiedliche Schritte der intendierten Strategie sukzessive erarbeitet. Und während das Kind lernt, schrittweise zu rechnen, lernt die Leserin oder der Leser, dass sich die Funktion des Materials im Prozess der Strategieentwicklung verändern (kann) und die Beschreibungen des Kindes gerade dazu Relevantes zu Gehör bringen.

- *Rebecca Klose* macht in ihrem Beitrag mathematische Begriffsentwicklung gleich im doppelten Sinne hörbar. Sie untersucht, wie bilingual unterrichtete Schülerinnen und Schülern einen Audio-Podcast zum Begriff des Würfels erstellen. Dabei kann nicht nur der geometrische Körper auf neue Weise vernommen werden, sondern auch das Erhebungsinstruments des Audio-Podcasts, welches in seinem mehrstufigen Erstellungsprozess Begriffsklärungen auf unterschiedliche Weisen herausfordert und dabei ein Abgleichen und Weiterentwickeln von Deutungen ermöglicht. Womöglich sogar in mehreren Sprachen?
- *Birgit Brandt* und *Sarah Keuch* suchen nach sprachlichen Korrekturstrategien in mathematischen Erkundungssituationen zum Inhaltsbereich Größen und Messen und fragen, ob und wie die beobachteten Erzieherinnen dadurch eine sprachförderliche Umgebung für ihre jungen Lernenden gestalten. Um den Sprachgebrauch in den Interaktionen klarer zu hören, erweitern sie die genuin für die interpretative Forschung entwickelte Interaktionsanalyse um linguistische Analysetools. Die Autorinnen identifizieren spannende Muster in der Verwendung von Korrekturstrategien und kommen zu einer klaren Einschätzung, inwiefern mit den sprachlichen Korrekturen auch inhaltliche Aushandlungen verbunden werden (können).

Theoretische Brückenschläge

Der vorliegende Band begann in diesem Vorwort mit dem Solon'schen Klingen der Interpretativen Forschung: Verstehen, um zu verändern. Dieses Verstehen kann durch theoretische Brückenschläge erleichtert, neu orientiert, bereichert werden. Und so schließt der Band auch mit eben jenem Klingen – um der Theorie willen. Zwei Beiträge greifen aus der Perspektive der Interpretativen Forschung neue theoretische Stimmen auf, arrangieren sie mit vertrauten Klängen und erweitern damit das Spektrum der Interpretativen Forschung.

- *Max Moll* schlägt eine interpretative Brücke zu dem rein rational handelnden Individuum aus Kants „Kritik der reinen Vernunft" und seinen Vorlesungen zur Logik. Dabei wird die philosophische Überzeugung zu einer interaktionistisch gewendeten Überzeugung im Werden, welche von einem Fürwahrhalten und von inhaltlichen Gründen abhängig ist. Es sind diese inhaltlichen Gründe, die in der Interaktion mit anderen verhandelt, verändert und verfestigt werden und so situativ zu unterschiedlichen Arten der Überzeugung führen können. Die Leserin und der Leser werden vom Hinnehmen zum Wissen geführt und können am Ende Äußerungen der Überzeugung neu hören.

- Je direkter, desto besser? *Anna-Marietha Vogler* schlägt eine interpretative Brücke zu Äußerungen, die gar nicht *zu hören* sind. Sie nutzt den Ansatz der latenten Sinnstrukturen aus der Objektiven Hermeneutik nach Oevermann und fragt im Alltag des Kindergartens nach Prozessen des impliziten Lernens. Dort, wo mathematische Bedeutungszuschreibungen gerade nicht expliziert werden, sondern im Spektrum des Impliziten, des Möglichen und des Mitschwingenden verbleiben, kommt die Autorin zu einer klaren Antwort auf die Frage, ob die identifizierten Latenzen prinzipiell eine Hürde für frühe mathematische Lernprozesse sind.

Chemnitz und Bielefeld, Januar 2019
Birgit Brandt und Kerstin Tiedemann

Problemlösen – Entdecken – Argumentieren: Prozessbezogene Kompetenzen

Marcus Nührenbörger und Ralph Schwarzkopf

Argumentierendes Rechnen: Algebraische Lernchancen im Arithmetikunterricht der Grundschule

1. Einleitung: Eine verpasste Lernchance

Substantielle Lernumgebungen und die ihnen zugrunde liegenden Aufgabenformate (Wittmann, 1998) spielen in der Grundschule eine zentrale Rolle bei der Gestaltung mathematischer Lernsituationen, in denen inhaltliche und prozessorientierte Kompetenzen fachlich fundiert und miteinander verzahnt aufgebaut werden sollen. In unserem Projekt „PEnDEL M“ (Praxisbezogene Entwicklungsprojekte im Dialog mit ErzieherInnen und Lehrkräften im Fach Mathematik) entwickeln wir derartige bestehende Lernumgebungen weiter und erproben deren Potenzial, indem wir didaktische Lehr-Lernexperimente durchführen und aus einer qualitativen Perspektive die mathematischen Lernprozesse analysieren. Unseren Blick richten wir auf Lernchancen, die sich während arithmetischer Erkundungen ergeben und die explizit mit Argumentationsprozessen verbunden sind oder aber diese auslösen – wir bezeichnen solche Verschmelzungen von inhaltlichen und prozessbezogenen Lernzielen auch kurz als „argumentierendes Rechnen“. Wir erhoffen uns davon in der Tradition der Design-Science, dass die mathematische Unterrichtskultur der Grundschule vom Fach aus gedacht langfristig produktiv beeinflusst wird (vgl. Nührenbörger, Rösken-Winter, Ip Fung, Schwarzkopf & Wittmann, 2016; Wittmann, 1995).

Durch die Analyse der Experimente wissen wir aber natürlich, dass der Unterricht nicht allein durch die Einspeisung gut durchdachter Aufgaben produktiv wird – vielmehr handelt es sich beim Unterrichtsgeschehen um einen oftmals spontan ablaufenden sozialen Prozess, der nach seinen eigenen Regeln darüber entscheidet, ob eine Lernumgebung auch wirklich die anvisierten Lernprozesse unterstützt. In dem folgenden Beispiel soll diese Autonomie der sozialen Prozesse gegenüber der Substanz einer Lernumgebung verdeutlicht werden:

In diesem Beispiel geht es um das bekannte Aufgabenformat „Rechendreiecke“ (v. a. Wittmann, 2001). Rechendreiecken liegt die folgende Regel zugrunde: Die Summe zweier benachbarter innerer Zahlen wird in das zugehörige äußere Feld geschrieben (s. Abb. 1).

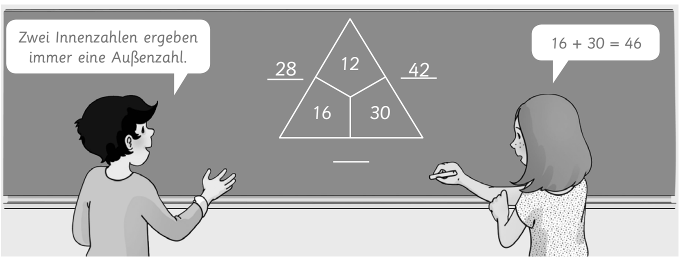


Abbildung 1: Rechendreieck (Nührenbörger, Schwarzkopf, Bischoff, Götze & Heß, 2017, S. 122)

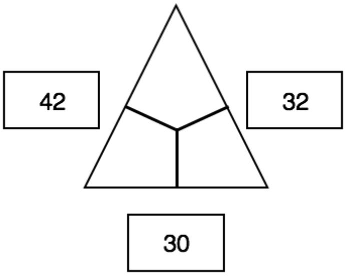
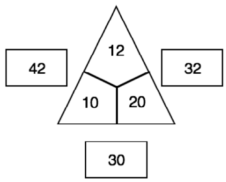
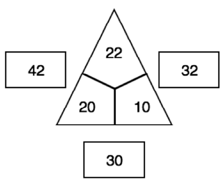


Abbildung 2: Rechendreieck mit vorgegebenen Außenzahlen

Ein von Studierenden des Masterstudiums Primarstufe erprobtes Unterrichtsexperiment zielte nun darauf ab, dass die Kinder einer 4. Klasse zu einem Rechendreieck mit vorgegebenen Außenzahlen die passenden Innenzahlen finden sollten – eine anspruchsvolle Möglichkeit, Rechendreiecke zu thematisieren (s. Abb. 2). Hierzu hatten die Kinder im Vorfeld bereits einen zentralen Zusammenhang in diesem Aufgabenformat entdeckt: Die Summe der äußeren Zahlen ist das Doppelte der Summe der inneren Zahlen. In einer anschließenden Unterrichtsstunde hat die Studentin ein Rechendreieck an die Tafel gezeichnet, in dem nur die Zahlen in den äußeren Feldern vorgegeben waren. Nach ihrer Intention sollte nun eine Idee dafür entwickelt werden, wie man aus diesen äußeren Zahlen die Zahlen in den inneren Feldern bestimmen kann – konkret angedacht war: Man halbiert die Summe der äußeren Zahlen und zerlegt diese in drei Summanden für die inneren Felder, die dann durch systematisches Probieren in relativ wenigen Schritten so angepasst werden können, dass sich eine korrekte Lösung ergibt. Entsprechend fragt sie die Klasse nach Vorschlägen dafür, wie man das Problem angehen könnte. Dabei ergibt sich der folgende Interaktionsprozess[1]:

1	Robert	(*kommt an die Tafel*) Das ist, glaub ich, so wie die Zahlenmauern, dass 30 plus 32 minus 42 geteilt durch zwei, da kommt dann das Ergebnis unten hin.
2	Klasse	Häh? (*Unruhe*)
3	Robert	Dann kommt die 10 dahin (*notiert „10“ im Feld unten links*) da 20 (*notiert „20“ rechts unten und oben eine „12“*)
4	Lehrerin	So, jetzt haben wir hier eine 10 und hier eine 20 (*zeigt auf „10“ und „20“*) stehen. Wie können wir denn jetzt weitermachen? Das war ja schon mal nicht schlecht, was der Robert sich da überlegt hat.
5	Clarissa	Wir könnten die 20 und die 10 (*zeigt auf „10“ und „20“*) tauschen. Weil das würde dann glaub ich besser passen. Dann würde man da oben ne 22 hinmachen und dann hätten wir das Ergebnis. (*wischt die Innenzahlen aus und notiert die neuen Innenzahlen „10“, „20“ und „22“*)





1 Die Transkripte in diesem Beitrag werden zur besseren Lesbarkeit geglättet wiedergegeben. Sämtliche Namen wurden anonymisiert.

Entgegen der unterstellten Intention der Lehrerin stellt Robert hier eine Beziehung her, durch die er bereits eine der inneren Zahlen ausrechnen kann: Er subtrahiert eine der äußeren Zahlen von der Summe der anderen beiden und halbiert das Ergebnis. Dass Robert hier in der Tat einen korrekten Ansatz verfolgt, kann man sehen, wenn man die äußeren Zahlen in Beziehung zu den inneren darstellt: Bezeichnet man die inneren Zahlen mit den Variablen *a, b* und *c,* dann sieht man, dass bei Roberts Rechnung eine der Innenzahlen herauskommen muss: $0{,}5 \cdot [(a + b) + (b + c) - (c + a)] = b$. Natürlich steht dieser Formelapparat dem Schüler nicht zur Verfügung und es soll hier auch nicht behauptet werden, dass sich Robert der aufgestellten Beziehung in einer solchen Reichweite bewusst wäre. Es scheint vielmehr so zu sein, dass er hier intuitiv eine in dreistöckigen Zahlenmauern vorherrschende Regelmäßigkeit überträgt: Subtrahiert man von der Zahl im Deckstein die beiden Zahlen in Randsteinen der Basis und halbiert das Ergebnis, dann erhält man die Zahl im mittleren Basisstein (s. Abb. 3).

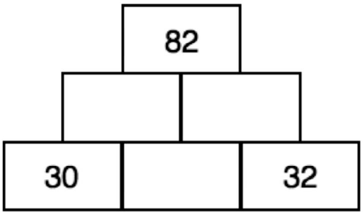


Abbildung 3: Zahlenmauern mit vorgegebenen Randzahlen

Den anderen Kindern scheint diese Analogie ganz fremd zu sein, zumindest zeigen sie sich in ihrer Reaktion überrascht (Z. 2). Robert lässt sich davon aber nicht beirren, sondern widmet sich der Fertigstellung des Rechendreiecks über das Ergänzen der weiteren Innenzahlen mit Hilfe der ermittelten Zahl. Der Hinweis der Lehrerin (Z. 4) scheint von den Kindern als Aufforderung zur Modifikation verstanden zu werden: Sie wertet den Vorschlag von Robert als fast korrekt, denn zwei benannte Innenzahlen (10 und 20) kommen letztlich auch in der richtigen Lösung vor („schon mal ganz gut"). Die Schülerin Clarissa kommt an die Tafel und kann durch das Vertauschen (und nicht durch eine Neuberechnung) zweier Zahlen die korrekte Lösung herstellen. An dieser Stelle endet die Auseinandersetzung mit diesem Rechendreieck: Die Frage, warum denn Roberts offenbar exotischer Vorschlag überhaupt zu einer korrekten Zahl (wenn auch an der falschen Position) geführt hat, bleibt unbeantwortet und wird letztlich auch gar nicht explizit gestellt – das Potenzial der substantiellen Lernumgebung realisiert sich hier nicht. Dadurch kommt die eigentliche Intention im Einsatz der Rechendreiecke, nämlich einen Arithmetikunterricht von „mehr algebraischer Qualität" (vgl. Winter, 1982) zu etablieren, nicht zum Tragen – provokativ formuliert wird nur eine Aufgabe ausgerechnet, die von den Zahlen her im Schwierigkeitsgrad weit unter dem Niveau einer vierten Klasse liegt.

Woran liegt das? Nach unserer Interpretation zeigt sich hier die Macht der empirischen Wissenskonstruktion (vgl. Steinbring, 2000; Schwarzkopf, 2003): Die am

Unterricht beteiligten Personen sind schlicht zufrieden mit der gelösten Aufgabe und sehen keinen Bedarf, sich in einem mühevollen Prozess mit dem Zustandekommen der Lösung auseinanderzusetzen. Auch die Lehrerin beharrt hier nicht darauf, die Hintergründe des Vorgehens zu beleuchten. Möglicherweise erkennt sie in dem flüchtigen Moment das Potenzial in Roberts Idee nicht, weil sie aufgrund ihrer Planung eine gänzlich andere Erwartungshaltung an die Lösungsvorschläge aufgebaut hat und die Routinen im sozialen Interaktionsprozess aufrecht erhalten möchte (s. hierzu 2.4). Vielleicht erscheint es ihr aber auch unzugänglich für die Kinder, sich an dieser Stelle mit derart beziehungsreichem und komplex anmutendem Wissen auseinanderzusetzen.

Hierzu sei nur kurz angemerkt, dass die Idee sehr wohl zugänglich gemacht werden kann, wenn man etwa anschauliche Darstellungen der Zahlen im Dreieck wählen würde. Im untenstehenden Dreieck (Abb. 4) sieht man zum Beispiel was passiert, wenn man Roberts Rechenvorschrift mit Plättchen darstellt: Addiert man die rechte Außenzahl zur unteren Außenzahl, dann besteht die Summe aus der oberen Innenzahl (schwarze Plättchen), der linken Innenzahl (weiße Plättchen) und dem Doppelten der rechten Innenzahl (graue Plättchen). Durch die Subtraktion der linken Außenzahl verringert man die Summe dann um die obere (schwarze Plättchen) und die linke Innenzahl (weiße Plättchen) und es bleiben die grauen Plättchen übrig, also das Doppelte der rechten Innenzahl.

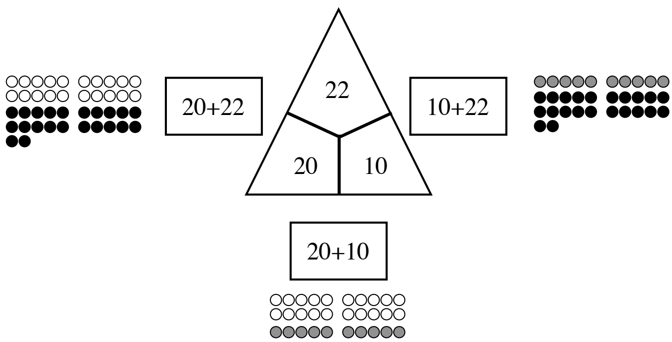


Abbildung 4: Zusammenhänge Innen- und Außenzahlen

Die Unterrichtsszene soll an dieser Stelle verdeutlichen, dass eine substantielle Lernumgebung auch substantielle Wissenskonstruktionen auslösen kann – sie verdeutlicht aber ebenso, dass letztlich nicht die gute Aufgabe, sondern vielmehr der soziale Kontext ihrer Behandlung darüber entscheidet, ob die Wissenskonstruktion zu wirklich produktiven Lernchancen ausgebaut werden oder ob sie schlicht verpuffen. In diesem Sinne folgen wir im PEnDEL-Projekt zwei unterschiedlichen Ansätzen, deren Verknüpfungsmöglichkeiten klärungsbedürftig erscheinen: In der konstruktiven Perspektive entwickeln wir substantielle Lernumgebungen und gehen davon aus, dass die sozialen Prozesse im Mathematikunterricht durch die Lernumgebungen gesteuert werden. In den rekonstruktiven Ansätzen verstehen wir die Mathematik dagegen nicht als vorgegebene Grundlage, sondern als Resultat der sozial-interaktiven Prozesse des Lehrens und Lernens (vgl. Nührenbörger & Schwarzkopf, 2010). Diese scheinbar widersprüchlichen Ansätze für die Entwicklung und Erforschung von Mathematikunterricht können aber produktiv miteinander verbunden werden, wenn man als Kernstück der Entwicklung und Erforschung den Fokus auf Argumentationsprozesse setzt, die gleichermaßen aus der konstruktiven wie aus der rekonstruktiven Perspektive zentral sind. Im vorliegenden Beitrag sollen die zugehörigen Überlegungen zur Diskussion gestellt werden. Hierzu konzentrieren wir uns inhaltlich auf die Gestaltung und Analyse von substantiellen Lernanlässen in der Arithmetik, die mit dem Ziel entwickelt werden, einen Mathematikunterricht von etwas mehr algebraischer Qualität zu etablieren.

2. Argumentationen

2.1 Die Bedeutung der Interaktionsprozesse

Unsere empirische Forschung steht in der Tradition des interpretativen Forschungsparadigmas (z. B. Maier & Voigt, 1994; Brandt & Krummheuer, 2000). Wir verfolgen also weniger das Ziel, im Sinne einer klassischen Interventionsstudie zu messen, ob der Einsatz von substantiellen Lernumgebungen wirksam ist. Vielmehr wollen wir aus einer theoretischen Perspektive verstehen und beschreiben, welche Art von Lehr- und Lernprozessen in der unterrichtlichen Auseinandersetzung mit substantiellen Lernumgebungen entstehen können. Hierbei stützen wir uns auf Lehr- und Lerntheorien der mathematikdidaktischen Nachbardisziplinen. Im Wesentlichen wird unsere Arbeit beeinflusst durch den symbolischen Interaktionismus und die Ethnomethodologie, wie sie für die Mathematikdidaktik fruchtbar gemacht wurden (Voigt, 1984; Krummheuer, 1995; Yackel & Cobb, 1996), durch argumentationstheoretische Ansätze (Schwarzkopf, 2001 und 2003) und epistemologische Perspektiven (Steinbring, 2005; Nührenbörger, 2009). Diesen Ansätzen folgend nehmen wir eine mikrosoziologische Perspektive ein und gehen davon aus, dass die Inhalte eines Lehr-Lernprozesses nicht einfach nur der mathematikdidaktischen Intention der geplanten Lernanlässe folgen, sofern denn die Lernumgebung „funktioniert". Grundlage unserer rekonstruktiven Perspektive ist vielmehr, dass die an der Interaktion beteiligten Personen die mathematischen Objekte und Beziehungen erst in der Interaktion herstellen und dadurch erst die Bedeutungen innerhalb der Lernumgebungen konstituieren. In diesem Sinne sehen wir die soziale Interaktion als eigentliche Quelle für die Entwicklung mathematischen Wissens: Wissen entwickelt sich nicht allein durch „Verfeinerung und Spezialisierung im Gebrauch (…). Grenzen überschreitet das Individuum aktiv entwerfend, erprobend und aushandelnd in Situationen sozialer Interaktion" (Bauersfeld, 1983, S. 31). Kurz formuliert bestimmt also nicht die substantielle Lernumgebung die Interaktion im Lehr-Lernprozess, sondern umgekehrt entsteht die mathematische Substanz einer Lernumgebung erst durch die interaktiven Aushandlungen der beteiligten Personen.

2.2 Das Verhältnis von Argumentieren und Beweisen

Bekanntlich ist die wissenschaftliche Disziplin Mathematik untrennbar gebunden an das mathematische Beweisen (z. B. Jahnke & Ufer, 2015). So wird eine mathematische Aussage nur dann akzeptiert, wenn sie durch einen mathematisch fundierten Beweis gesichert wurde, d. h. jeder mathematische Erkenntnisgewinn ist untrennbar mit einem zugehörigen Beweis verbunden. Entsprechend spricht man dem Beweisen auch für den Arithmetikunterricht eine zentrale Rolle zu – grob formuliert kann man hierin einen wesentlichen Stützpfeiler für die Weiterentwicklung des traditionellen Rechenunterrichts zu einem modernen Mathematikunterricht sehen:

> Wenn wir es […] nicht erreichen, bei einer Mehrheit von Schülern / Studenten ein Bedürfnis nach Begründungen, Erklärungen, ‚Verursachungen' und damit also nach Einsicht und prinzipiellem Denken zu wecken, so ist kaum erkennbar, welchen Sinn ein Mathematikunterricht, der für alle obligat ist, noch haben könnte (Winter, 1983, S. 64).

Natürlich gibt es keine genaue Definition für den Begriff *Beweis* in der Mathematik (vgl. Heintz, 2000; Wittmann & Müller, 1988): Ob wir etwas als einen (guten) Beweis akzeptieren oder nicht, hängt von unseren Anforderungen ab, d. h. von der Funktion des Nachweises innerhalb der besonderen Situation. Nach Hanna (2000) ist die wichtigste Funktion des Beweises in didaktisch motivierten Situationen nicht etwa die Sicherung von Wissen, als wichtigere Funktion sieht sie vielmehr das *Erklären von Zusammenhängen* an (vgl. auch Winter, 1983):

> In the educational domain, then, it is only natural to view proof first and foremost as explanation, and in consequence to value most highly those proofs which best help to explain (Hanna, 2000, S. 8).

Aus diesem Grunde ist es legitim, dass man im Mathematikunterricht – erst recht in dem für die Grundschule – von der strengen Auslegung der logischen Stringenz und der formalen Darstellungsweise von Beweisen absieht, um im Gegenzug die sinnstiftende *Wissensvermehrung* und *inhaltliche Vernetzung* zu betonen, ohne aber ein grundschulgemäßes Beweisen aufzugeben. Dementsprechend haben sich in der Mathematikdidaktik Formen des „prämathematischen Beweisens" (Kirsch, 1979), des „anschaulichen Beweisens" (Winter, 1983), des „inhaltlich-operativen Beweisens" (Wittmann & Müller, 1988) oder auch neuerdings des „beispielgebundenen Beweisens" (Krumsdorf, 2017) etabliert.

Beispielsweise stützen sich inhaltlich anschauliche Beweise „auf Konstruktionen und Operationen, von denen intuitiv erkennbar ist, dass sie sich auf eine ganze Klasse von Beispielen anwenden lassen und bestimmte Folgerungen nach sich ziehen" (Wittmann & Müller, 1988, S. 249). Die Erkenntnis, inwieweit ein Einzelphänomen Allgemeingültigkeit besitzt, soll also dem Lernenden durch die inhaltlich-anschauliche Darstellung eines Beweises ermöglicht werden. In erster Linie zielt diese auf das Verstehen von Gesetzmäßigkeiten und von elementaren strukturellen Zusammenhängen, also auf Erkenntnisse über sinnvolle Beziehungen *zwischen den mathematischen* Objekten.

Beweise sind entsprechend dieser Intention von Anfang an mit in den Grundschulmathematikunterricht zu integrieren und sollen „in den Lernprozess der Schüler und ihre Verständigung untereinander eingebettet werden“ (Wittmann & Müller, 1988, S. 254). Um dabei aber deutlich zu machen, dass es im Unterricht nicht um die formale Darstellung, sondern um die erklärende Funktion eines Beweises geht, nutzt man zur Beschreibung der zugehörigen prozessbezogenen Kompetenz den Begriff „Argumentation“, unter dem man in der konstruktiven Mathematikdidaktik in der Regel eine Vorform des strengen mathematischen Beweisens versteht, die auch mit den symbolischen und begrifflichen Mitteln der früheren Klassenstufen realisiert werden kann:

> Man benutzt diesen Terminus (nämlich „Argumentieren“, Anm. Aut.) meist im Sinne von „begründen“ und will damit zum Ausdruck bringen, dass man das Begründen nicht auf die mathematisch eingeengte Form des Beweisens beschränken möchte (Vollrath, 1980, S. 28).

2.3 Die Bedeutung des Argumentierens für das algebraische Verstehen der Arithmetik

Für einen modernen Mathematikunterricht der Grundschule kommt es im Vergleich zu den Intentionen eines traditionellen Rechenunterrichts „gerade darauf an, Argumentationen von mehr algebraischer Qualität zu kultivieren“ (Winter, 1982, S. 195). In diesem Sinne erfährt das Argumentieren eine doppelte Funktion – zum einen mit Blick auf eine frühe Beweiskultur im Mathematikunterricht, zum anderen mit Blick auf einen Arithmetikunterricht von algebraischer Qualität, der auf die Erkundung allgemeiner mathematischer Strukturen mithilfe konkreter Zahlen abzielt (Schwarzkopf, 2003). Das Konzept des *argumentierenden Rechnens* impliziert also die Etablierung des anschaulich-operativen Beweisens und verleiht damit der Entwicklung eines algebraischen Denkens in arithmetischen Inhaltsbereichen eine zentrale Funktion in der Grundschule.

In den letzten Jahren wird diese Perspektive unter verschiedenen Bezeichnungen – etwa „Early-Algebra“, „Prä-Algebra“ oder „frühe Algebra“ – diskutiert (z. B. Akinwunmi, 2012; Kieran, 2011 und 2017; Steinweg, 2013). In diesen Ansätzen wird ein in arithmetischen Kontexten eingebettetes verallgemeinerndes Denken als algebraisches Denken verstanden, wenn eine argumentativ strukturierte Sichtweise auf arithmetische Phänomene eingenommen wird, die sich nicht in der bloßen Beschreibung einer oberflächlich erkennbaren Regelmäßigkeit erschöpft: „Structural thinking is much more than seeing a pattern, such as ‚when one number increases by three the other goes down by three‘“ (Mason, Stephens & Watson, 2009, S. 23).

Allerdings wird diese Sichtweise im traditionellen Mathematikunterricht scheinbar nur wenig gefördert. So belegen zum Beispiel umfangreiche Studien zum Umgang mit dem Gleichheitszeichen in der Grundschule, dass Kinder dieses in der Regel sehr einseitig interpretieren und als ein Handlungszeichen verstehen (vgl. z. B. Steinweg, 2013; Cai & Knuth, 2011). Dieses Phänomen wird verbreitet als Mangel an algebraischer Qualität des Arithmetikunterrichts verstanden, da sich eine solche einseitige Interpretation des Gleichheitszeichens langfristig negativ auf das Verständnis von algebraischen Termbeziehungen in den späteren Jahrgängen auswirken kann (vgl. z. B. Falkner, Levi & Carpenter, 1999).

Aus unserer Sicht muss allerdings mitbedacht werden, dass Kinder im Mathematikunterricht der Grundschule erst in die arithmetischen Grundlagen der operativen Verknüpfung von Zahlen eingeführt werden. Hierzu erlernen sie die Notation von Termen in Verbindung mit einer Zahl, die das Ergebnis der Termoperation zum Ausdruck bringt. Folglich ist es für Kinder in der Grundschule naheliegender, mit einem Gleichheitszeichen eine Aufgabe mit ihrem Ergebnis zu verbinden („Aufgabe-Ergebnis-Deutung"; Winter, 1983), als dass sie es als symmetrische Vergleichsmöglichkeit zwischen zwei Termen interpretieren würden. Im Vordergrund steht die Frage, wie das Ergebnis zu einer Aufgabe ermittelt werden kann und ob die gefundene Zahl korrekt ist – also eine eher dynamische Vorstellung vom Gleichheitszeichen als Handlungsaufforderung. Aus diesem Grunde vervollständigen viele Kinder eine Gleichung wie 4+3=__+2 durch 4+3=**7**+2**=9** (für eine umfangreiche Darstellung dieses Phänomens s. z. B. Steinweg, 2004).

Wir verfolgen nun aber nicht vorrangig die Intention, den Kindern das Gleichheitszeichen von Beginn an ausschließlich als symmetrische und eher statisch zu sehende Beziehung zwischen zwei Termen nahezubringen – vielmehr geht es uns eher darum, von Anfang an ein tragfähiges Verständnis dafür zu etablieren, dass zwei Terme auch dann gleich sein können, wenn sie auf den ersten Blick ganz unterschiedlich aussehen. Hierzu ist es von Bedeutung, dass die Kinder Terme eben nicht nur als Anlass zum Ausrechnen, zum Beschreiben von Rechenwegen und zum Präsentieren von Lösungen verstehen. Es geht in der Arithmetik vielmehr auch darum, dass Beziehungen zwischen Termen konstruiert werden, die als Anlass zum Vergleichen und Umrechnen sowie zum arithmetischen Begründen der abstrakten algebraischen Zusammenhänge genutzt werden können (vgl. Schwarzkopf, Nührenbörger & Mayer, 2017).

Wie aber können Kinder in der Grundschule angeregt werden, ihre arithmetischen Kenntnisse mit algebraischem Denken anzureichern und zu verknüpfen? Diese Lernprozesse sind sehr schwierig zu initiieren, wenn sie nicht vorschnell in regelgeleitete Formate des Umrechnens in spezifischen Schrittfolgen ausufern sollen.

> Natürlich, irgendeine Art von stärkerer Algebraisierung z. B. führt keineswegs automatisch zu einer Verbesserung (…). Aber mathematische Mittel verhindern doch auch nicht automatisch das Denken, sie können im Gegenteil wirkungsvolle Instrumente sein, wenn sie als solche auch behutsam und umsichtig aufgebaut werden. Und das ist zweifellos eine Kunst (Winter 1976, 339).

In diesem Sinne lassen sich algebraische Denkprozesse nicht erzwingen. Das Bemühen des Unterrichts muss vielmehr darauf abzielen, den Kindern authentische Anlässe zu eröffnen, die sie zur Weiterentwicklung des arithmetischen Könnens zu einem mehr algebraischen Verstehen anregt – wir sprechen hierbei von der Initiierung *substantieller Lernchancen*.

Eine Möglichkeit ist es, ein Verständnis von Gleichheit bei Kindern bewusst durch den Vergleich von Termen zu entwickeln, indem arithmetische Termumformungen argumentierend durchgeführt und mit anschaulichen Werkzeugen dargestellt werden (s. Abb. 5). In diesem Kontext schlägt beispielsweise Steinweg (2013, S. 96ff.) vor, korrekte und inkorrekte Termvergleiche bewerten und begründet korrigieren zu lassen (vgl. auch Seo & Ginsburg, 2003).

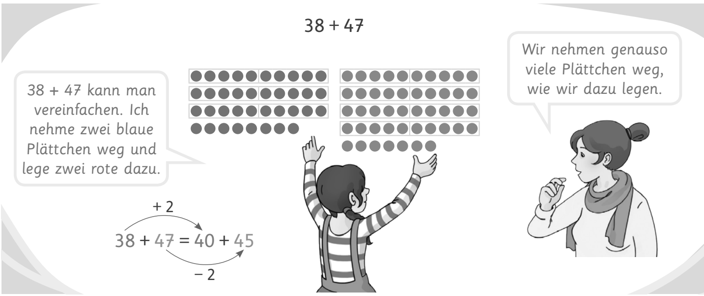


Abbildung 5: Termvergleich (Nührenbörger et al., 2017, S. 116)

In unserem Forschungsprojekt nehmen wir eine weitere Perspektive ein – und zwar zielen wir auf die Entwicklung eines flexiblen und tragfähigen (algebraischen) Verständnisses von arithmetischen Gleichheiten, ohne dass diese formal im Sinne einer Gleichung aufgestellt werden müssten (Nührenbörger & Schwarzkopf, 2014). Die dem Projekt zugrunde liegende Annahme ist, dass eine zu enge Verknüpfung des Gleichheitskonzepts mit dem Gleichheitszeichen die Kinder auf Grund unterrichtlicher Routinen dazu *verführt*, die Terme zunächst auszurechnen, anstatt inhaltliche Gleichheiten zu untersuchen (vgl. Nührenbörger & Unteregge, 2017).

Nach Winter (1983) ruht das Verständnis mathematischer Gleichheit in der Grundschule darauf, dass die Kinder von zwei Darstellungen auf deren gemeinsame Gegenstandsbezeichnung abstrahieren. Sie rechnen also die Terme nicht allein aus, sondern rechnen sie so um, dass ein dritter Term in operativer Beziehung zu den beiden anderen Terme steht. Letztlich geht es also darum, dass Kinder durch passende operative Variationen, also durch *strukturelles Umrechnen*, einen Term in einen anderen überführen; in der Regel vermittelt über einen oder mehrere weitere Term(e). Die prinzipielle Möglichkeit, verschiedene operative Variationen anzuwenden, bedeutet eine fruchtbare Mehrdeutigkeit des Gleichheitsverständnisses.

2.4 Die lerntheoretische Dimension von Argumentationen

Die argumentationstheoretischen Grundlagen unseres Projekts basieren auf Erkenntnissen aus der Pragmalinguistik (insbesondere Klein, 1980; vgl. Krummheuer z. B. 1995). Dort werden Argumentationen verbreitet als spezielle sozial-interaktive Prozesse verstanden, die immer dann zustande kommen können, wenn die routinierte Kooperation einer sozialen Gruppe durch das Auftreten einer Strittigkeit gestört wird und der kooperative Prozess deswegen nicht fortgesetzt werden kann. Wenn sich Kinder beispielsweise regelmäßig zum Fußballspielen auf einem Sportplatz treffen, dann handeln sie kooperativ, indem sie etwa durch ein routiniertes Wahlverfahren zwei gleichgroße Mannschaften bilden. Eine Störung dieser Routine kann aber dann auftreten, wenn die Gruppe aus einer ungeraden Anzahl von Kindern besteht: Die Kooperation muss unterbrochen werden, weil man zunächst klären muss, wie aus einer ungeraden Anzahl von Kindern auf gerechte Weise zwei Mannschaften gebildet werden können.

Zur Klärung dieser strittigen Frage suchen die Beteiligten in kooperativer Weise eine Antwort, die von allen beteiligten Personen akzeptiert werden kann. Vorschläge könnten etwa sein, mit zwei gleichgroßen Mannschaften auf ein Tor zu spielen, ein Kind als Schiedsrichter zu beschäftigen, ein Kind nach Hause zu schicken, ein weiteres Kind herbeizurufen oder einfach mit zwei unterschiedlich großen Teams zu spielen.

Solche Prozesse nennt man nach Klein (1980) *kollektive, kooperative Argumentation*: Eine soziale Gruppe stellt eine unterbrochene Kooperation wieder her, indem sie einvernehmlich versucht, den Grund der Unterbrechung beizulegen, also eine Antwort auf die strittige Frage zu generieren. Im gelingenden Fall schaffen es die Beteiligten durch die Entwicklung inhaltlicher Strukturen, die man Argumente nennt, die Kooperation fortzuführen – anderenfalls zerbricht die Interaktion. Kollektive Argumentationen ergeben sich in unserem Verständnis also nicht bereits in den sozialen Versuchen von Kindern, sich die Rationalität ihrer Handlungen im Zuge der interaktiven Herstellung und Aushandlung von Bedeutungen gegenseitig anzuzeigen (wie in einer *reflexiven Rationalisierungspraxis*, vgl. Krummheuer & Fetzer, 2004, S. 29ff.). Sie zeigen sich vielmehr in diskursiven Prozessen, in denen explizit ein Begründungsbedarf angezeigt und zu befriedigen versucht wird (Schwarzkopf, 2003). Sie spielen somit eine zentrale Rolle, wenn man die interaktiven Bedingungen für die Realisierung *substantieller Lernchancen* verstehen will. Zur Klärung dieser Zusammenhänge ist es notwendig, zunächst einmal unsere theoretische Perspektive auf das Mathematiklernen zu charakterisieren.

Wir folgen hierbei den epistemologischen Ansätzen von Steinbring (2000, 2005), nach denen sich mathematisches Wissen in einer Spanne zwischen zwei Polen entwickelt: Auf der einen Seite ist das Wissen der *empirischen Situiertheit* verhaftet, hier kann nur Faktenwissen über konkret fassbare Objekte entstehen. Auf der anderen Seite der epistemologischen Spanne ist das Wissen *relational-allgemein*, besteht also nur noch in Strukturen zwischen Objekten, losgelöst vom situativ-konkreten Handeln. Weder in dem einen noch in dem anderen Extrem kann ein Lernprozess stattfinden: Bleibt das Wissen der empirischen Situiertheit verhaftet, dann entstehen nur neue Fakten, aber nicht das, was man als substantiellen Lernfortschritt bezeichnen würde. Bezogen auf den Arithmetikunterricht bleiben die Lernprozesse beispielsweise auf diesem Niveau, wenn die Kinder eine Vielzahl an Aufgaben immer wieder ausrechnen würden, ohne sich über die Beziehungen zwischen den Zahlen und den Ergebnissen Gedanken zu machen. Wird dagegen ein mathematischer Sachverhalt in dem anderen Extrem präsentiert, dann ist er losgelöst vom zugänglichen Erfahrungskontext der Kinder und bleibt gänzlich unverstanden. In diesem Sinne ist es nicht zielführend, den formalen Umgang mit Variablen vor einem stabilen und flexiblen Verständnis im Umgang mit Zahlen und deren Operationen zu thematisieren. Im Eingangsbeispiel zu den Rechendreiecken finden sich diese beiden Pole wieder: Robert präsentiert eine Idee, die für die am Unterricht Beteiligten offenbar keine Anknüpfungspunkte zum alten Wissen lieferte – aus diesem Grunde kann sich seine Idee nicht durchsetzen und wird zugunsten einer empirisch-situierten Ergebnisproduktion für das Rechendreieck vernachlässigt.

Substantielle Lernchancen können also nicht an den epistemologischen Polen der Wissenskonstruktion entstehen. Vielmehr ist es für ihre Realisierung im Mathematikunterricht notwendig (aber nicht hinreichend), dass der mathematische Sachverhalt in einer *Balance* zwischen einer zum bisherigen Wissen passenden, empirisch situierten „Faktenanreicherung“ und einer relationalen Allgemeinheit thematisiert wird. Die hintergründigen mathematischen Konzepte einer Lernumgebung dürfen für die Kinder also nicht so neu sein, dass ihnen die Grundlage für einen ersten, rudimentären Zugang zum Lerngegenstand fehlt. Kurz gesagt: Die Aufgabenstellung muss epistemologisch gesehen für die Kinder zugänglich sein.

Diese epistemologische Perspektive greift die soziale Lerntheorie von Miller (1986) auf. Während sich in der empirischen Situiertheit nur „relatives Lernen“, d. h. ein Zuwachs an Faktenwissen realisieren kann, führt die relationale Allgemeinheit zum Abbruch der Wissenskonstruktionsprozesse. Für die Schaffung neuer fruchtbarer und tragfähiger Wissensstrukturen (Miller spricht hier von „fundamentalen Lernprozessen“) ist es notwendig, dass eine Balance zwischen diesen beiden Polen eingehalten wird: „Das neue Wissen muss das alte Wissen systematisch überschreiten, darf vom alten aber auch nicht völlig losgelöst sein“ (Miller, 1986). Solche Prozesse, in denen bestehende Wissensnetze umstrukturiert werden müssen, ohne dass sie aufgehoben werden können, sind besonders schwierig zu initiieren. Kinder in der Grundschule, die nach Miller (1986/2006) noch keine autonomen Lerner sind, brauchen dazu die soziale Interaktion:

> Nur in der sozialen Gruppe und aufgrund der sozialen Interaktionsprozesse zwischen den Mitgliedern einer Gruppe kann das einzelne Individuum jene Erfahrungen machen, die fundamentale Lernschritte ermöglichen (Miller, 1986, S. 20; vgl. Steinbring, 2005, S. 193).

Dabei sind natürlich nicht alle Arten der Interaktion hilfreich, um fundamentale Lernschritte zu ermöglichen. Ein hoher Grad an Routine in einer Interaktion beispielsweise ist dafür wenig förderlich, da es keinen Anlass gibt, Wissensstrukturen umzustrukturieren, wenn man auf der Basis des alten Wissens erfolgreich interagieren kann (zu entsprechenden Wirkungsmechanismen von Interaktionsmustern vgl. Voigt, 1984). Hierbei spielt nach Miller die kollektive Argumentation eine besondere Rolle, insbesondere weil sie mit der Unterbrechung der Routine einhergeht und dabei eine Neubewertung, ggf. eine Uminterpretation bekannter Fakten und Strukturen mit sich bringt:

> Nur von solchen sozialen bzw. kommunikativen Handlungen, deren primäres Handlungsziel und deren Funktionsweise genau darin besteht, kollektive Lösungen für interindividuelle Koordinationsprobleme zu entwickeln, kann (wenn überhaupt) sinnvollerweise angenommen werden, dass durch sie grundlegende Lernprozesse ausgelöst werden können. Nur ein sozialer bzw. kommunikativer Handlungstyp scheint diese Bedingung zu erfüllen, und dies ist der kollektive Diskurs oder, um einen etwas genaueren Terminus zu verwenden, die kollektive Argumentation (Miller, 1986, S. 23).

Zusammengefasst sind also für die Initiierung produktiver Lernchancen in der Primarstufe solche Interaktionsprozesse notwendig, in denen Strittigkeiten durch eine kollektive Argumentation ausgeräumt werden – hierin liegt die lerntheoretische Dimension der kollektiven Argumentation für Grundschulkinder. Diese Grundbedingung zur Initiierung „fundamentaler Lernprozesse“ wird zum Beispiel im einleitenden Beispiel zum Rechendreieck nicht hergestellt. Den Grund dafür kann man nun nicht allein mit der Macht der *empirischen Wissenskonstruktion*, sondern auch mit der Macht der *Routine im sozialen Interaktionsprozess* erklären: Laut Miller wird eine kollektive Argumentation von den daran beteiligten Personen in der Regel als „erheblicher Stress“ empfunden, dem sich niemand ohne wirklich zwingende Gründe unterwerfen mag. Aus diesem Grunde, so Miller (1986), neigen Menschen dazu, ihre Probleme nicht argumentativ zu lösen. Im Beispiel sorgt etwa Clarissa durch die Produktion der korrekten Lösung dafür, dass der Unterricht routiniert fortgesetzt werden kann, ohne sich der Anstrengung einer argumentativen Auseinandersetzung mit Roberts exotischem Lösungsweg stellen zu müssen: Die schnelle Herstellung der Routine ist weniger mühevoll als eine diskursive Beilegung der Strittigkeit.

Der Fokus auf den mathematischen Inhalt allein reicht also nicht aus, um kollektive Argumentationen zu initiieren. Vielmehr sind die sozialen Bedingungen im Interaktionsprozess des Mathematikunterrichts die zentralen Faktoren. Es bedarf demnach günstiger interaktiver Bedingungen, um den Wissenszuwachs im Unterricht nicht durch die Kraft wissenssichernder Argumente auf „relatives Lernen“ (Miller, 1986) einzuschränken. In unserem Projekt versuchen wir daher, die sozialen Bedingungen im Unterrichtsgeschehen, die die Entstehung von kollektiven Argumentation unterstützen, näher zu verstehen und zu unterstützen. So kann die Lehrkraft zwar Bedürfnisse und auch Zugzwänge zum argumentierenden Rechnen wecken; zum Beispiel im Sinne von „Teacher-Orchestrated Classroom Arguments“ (Choppin, 2007). Wenn es aber ein zentrales Ziel des Mathematikunterrichts ist, dass die Kinder im Laufe der Grundschule immer selbstständiger Argumente entwickeln und eigenständig miteinander argumentieren, dann ist es wichtig, dass die Initiierung der Argumentationen nicht allein auf der Interaktion mit der Lehrkraft ruht. Viel bedeutsamer erscheint es, dass die Argumentation aus fachlicher Sicht authentisch wird. Dazu sollte die Lernumgebung so gestaltet sein, dass die Schülerinnen und Schüler dabei unterstützt werden, ihre routinemäßig hergestellten Erwartungen bei der Bearbeitung von Aufgabenstellungen oder bei einer mathematischen Beobachtung aufzubrechen.

In unserem Projekt versuchen wir daher, die Lernenden gleichermaßen von den fachlichen Strukturen her und von den sozialen Bedingungen her aufzufordern, eine neue Sichtweise einzunehmen und diese zu begründen. Hierzu bedienen wir uns des Konzepts der „produktiven Irritationen“ (Nührenbörger & Schwarzkopf, 2013, 2016). Eine produktive Irritation ist letztlich nichts anderes als die klärungsbedürftige Abweichung von einer eingenommenen Erwartung: Bisherige Ansichten, Zugangsweisen, Vorstellungen oder Erwartungen an eine Aufgabenstellung und -bearbeitung erscheinen plötzlich nicht mehr ausreichen, so dass die Lernenden neue Ideen zum Verständnis der strukturellen Zusammenhänge generieren und sich mit verschiedenen zugänglichen Darstellungen einer Operation oder eines Objekts näher auseinandersetzen. Nach Winter (1976, S. 349) eignen sich hierzu insbesondere Situationen, die „zum Fragen, Beobachten, Nachdenken anreizen, also eine Lücke, eine Störung, eben etwas Fragwürdiges enthalten.“ Die produktive Irritation soll den Kindern die Chance bieten, einerseits eine fachliche Strittigkeit zu erkennen, andererseits zu versuchen, diese argumentativ aufzulösen. In diesem Sinne folgen produktive Irritationen dem Schema:

(1) Erwartungshaltung aufbauen durch routinierte Aktivitäten,
(2) Erwartung enttäuschen durch Störung der Routine,
(3) Argumente hervorbringen zur Auflösung der Irritation.

3. Ein Beispiel: Gleichheit trotz Verschiedenheit

Zur Entwicklung einer produktiven Irritation nutzen wir zum Beispiel Umkehrzahlen, die nach der folgenden Aufgabenvorschrift gebildet werden: Man wähle zwei verschiedene Ziffern, bilde aus ihnen die größere und die kleinere zweistellige Zahl und betrachte die Differenz daraus. Bekanntlich entstehen als Differenzen hier die Vielfachen der 9, genauer gesagt ergibt sich das Produkt aus der Zifferndifferenz und 9, wie man durch eine kurze Termumformung auf der Basis der elementaren Rechengesetze für alle Ziffern a, b mit $a<b$ schnell beweisen kann:

$$(10b + a) - (10a + b) = (10b - b) + (a - 10a) = 9b - 9a = 9(b - a)$$

Konfrontiert man Kinder nun im Arithmetikunterricht der Grundschule mit solchen Differenzen von Umkehrzahlen, dann realisiert sich die algebraische Substanz des Ausgabenformats erst dann, wenn die Vielfachen der 9 in den Differenzen überhaupt erst einmal als Phänomen erkannt und dann auch noch im Sinne einer Argumentation erklärt werden. Dabei ist es nicht zentral, dass für die Erklärung die Variablen als Symbole der klassischen Schulalgebra genutzt werden. Vielmehr rücken Darstellungsmöglichkeiten in den Vordergrund, die man zum Führen operativer Beweise nutzt (vgl. Wittmann & Müller, 1988).

55	56	57	58	59
65	66	67	68	69
75	76	77	78	79
85	86	87	88	89
95	96	97	98	99

Abbildung 6: Ausschnitt aus der 100er-Tafel

Bildet man zum Beispiel die Differenz zwischen den Umkehrzahlen „95“ und „59“, so kann man das hintergründige allgemeine Phänomen exemplarisch durch die Wahl eines passenden Rechenweges erklären. So lässt sich an der Hundertertafel das Subtrahieren als Bewegung vom Subtrahenden zum Minuenden verstehen (s. Abb. 6): Man geht von der „59“ zunächst senkrecht nach unten, bis man in der Zeile des Minuenden ankommt. Hier ergibt sich zwangsweise eine Paschzahl („99“), weil der Zehner so erhöht werden muss, dass er zum Zehner der Umkehrzahl passt, der ja aber gleich dem Einer des Subtrahenden ist. Die Ziffern werden also einander angeglichen, d. h. die Anzahl der Zehnerschritte ergibt sich aus dem Unterschied zwischen den beiden gewählten Ziffern. Anschließend muss man genauso viele Einerschritte nach links gehen, um den ursprünglichen Unterschied zwischen den Ziffern durch Manipulation der Einerstelle wiederherzustellen. Insgesamt werden also (9-5) Zehner ergänzt und (9-5) Einer wieder abgezogen, so dass sich eine Differenz zwischen (9-5) Neunern ergibt. Da hierbei nirgendwo die Ziffern selbst, sondern nur die Überwindung ihres Unterschieds im Fokus stehen, handelt es sich um ein Beispiel mit Potenzial zur Verallgemeinerung: Das Prinzip des Zusammenhangs zwischen den Differenzen der Umkehrzahlen und den Vielfachen der Neun – und damit der algebraische Hintergrund dieses arithmetischen Phänomens – ist erklärt.

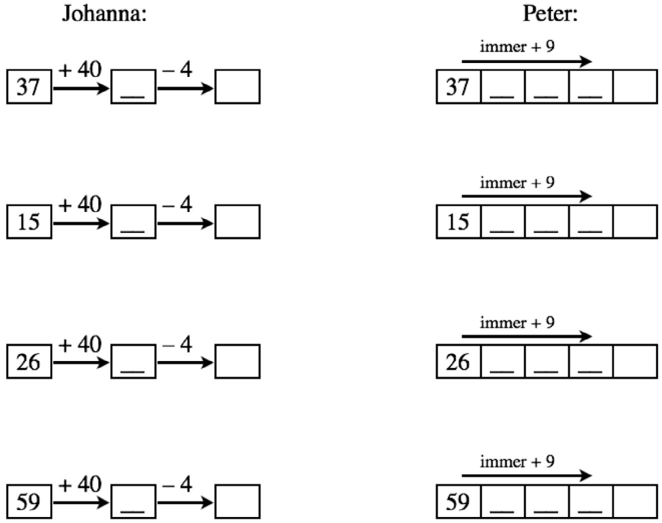
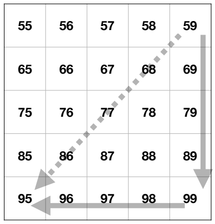


Abbildung 7: Verschieden aussehende Aufgabenstellungen zu den denselben Umkehrzahlen

In unserem Projekt stehen bei der Initiierung solcher argumentativ strukturierter Lernanlässe Vergleiche zwischen arithmetischen Termen im Fokus der Entwicklung: Die Kinder werden zum Beispiel mit – oberflächlich gesehen – unterschiedlich aussehenden Termen konfrontiert, deren Gleichheit sie zunächst als eine Irritation, ein unerwartetes Phänomen (an-)erkennen und dann begründen sollen (s. Nührenbörger & Schwarzkopf, 2010). Es geht also darum, dass die Kinder Gleichheiten als theoretische Eigenschaft zweier empirisch verschiedener Objekte zu verstehen lernen (vgl. Nührenbörger & Schwarzkopf, 2016). Hierzu bieten wir beispielsweise Kindern (wir nennen die in der folgenden Szene in Partnerarbeit miteinander kooperierenden Kinder Johanna und Peter, vgl. Nührenbörger, 2015) zwei verschieden aussehende Aufgabenserien, die zu denselben Berechnungsergebnissen führen (s. Abb. 7). Für die Kinder kann hier die Frage konstruktiv werden, warum beide Berechnungen die gleichen umgekehrten Zahlen produzieren. Im gemeinsamen Diskurs mit der Lehrerin vergleichen die Kinder die unterste Reihe ihrer Aufgaben miteinander und nutzen dazu die 100er-Tafel. Die jeweiligen Rechenschritte werden in der 100er-Tafel mit Pfeilen markiert.

In einer ersten Reflexion der Aufgabenstellung scheinen die Kinder nicht über die Gleichheit der Zielzahlen verwundert zu sein. Sie nehmen vielmehr die Unterschiede zwischen Rechnungen wahr, die an der 100er-Tafel in Form der verschiedenen Pfeile bzw. Weglängen zum Ausdruck kommen.

1 Lehrerin — Wollt ihr vielleicht eure beiden Rechenwege, ob ihr jetzt so lauft (*tippt auf die Zahlen 59, 99, 95 in der 100er-Tafel*) oder so (*zeigt auf die Zahlen 59, 68, 77, 86, 95*) einmal nebeneinander schreiben? Oder untereinander schreiben? Dann können wir doch vergleichen, ob die gleich sind. (…) weil es kommt ja das Gleiche raus.



2 Johanna — Aber das ist viel mehr!

3 Lehrerin — Warum ist das viel mehr?

4 Peter — Ja weil- das das dauert doch noch länger!

Beide Kinder signalisieren der Lehrerin, dass die Rechenwege voneinander zu unterscheiden sind, einerseits mit Blick auf die Anzahl der Felder an der 100er-Tafel, andererseits mit Blick auf Länge des Weges auf der 100er-Tafel. Es kommt demnach zwar dasselbe Resultat heraus, aber die Art der Rechenwege ist zu unterscheiden. Daher sind es für die Kinder ungleiche Aufgabenstellungen.

5 Lehrerin — […] Ja, aber nicht nach der Anzahl der Felder. Ihr müsst nur gucken, ob das das Gleiche ist was ihr dann macht (…), wisst ihr?

6 Peter — Ja, oder? Eigentlich könnte man… ja, man könnte das ja auch so machen, da sind ja die Zehner (*tippt mit dem Stift senkrecht von 59 bis 99), da sind die Einer (tippt mit dem Stift waagerecht von 99 bis 95*), wenn man, das sind, das passt ja vier, eeh nein (…). Fünf Einer und eins zwei drei vier fünf Zehner. Dann könnte man da ja die Einser nehmen und die an die Zehner verteilen und dann wär das alles neun. Und dann würde das passen, wie da. Immer neun. verstehst du?

7 Lehrerin — Aha. (..) Also ist das das Gleiche? Oder wie- was willst du mir jetzt sagen?

8 Peter — Weil das ist Minus (*tippt auf die Zahlen 99, 98, 97, 96, 95)* und das ist Plus *(tippt auf die Zahlen 59, 69, 79, 89, 99*) und das ist nur Plus (*tippt auf die Zahlen 59, 68, 77, 86, 95*) aber das sind die Einer (*tippt auf die Zahlen 99, 98, 97, 96, 95*). Wenn jetzt- wenn das jetzt Zweier wären (*tippt auf die Zahlen 99, 98, 97, 96, 95*) würde das nicht passen (*tippt auf die Zahlen 59*, 69, 79, 89, 99).

Nachdem die Lehrkraft die zwei Lernenden auffordert, ihre Aufmerksamkeit von der Betrachtung der Wegstrecken auf die Rechnungen zu lenken, gibt Peter zu verstehen, dass er eine Gleichheit zwischen den verschiedenen Rechenwegen sieht, die er durch eine Umrechnung sichtbar machen kann (hierbei unterläuft ihm ein „+1-Zählfehler“, da er das Startfeld der Einerschritte mitzählt):