Ralf Schwarzbach

Chemisches Rechnen und Stöchiometrie

2. AUFLAGE

WVG
Wissenschaftliche
Verlagsgesellschaft
Stuttgart

Schwarzbach

Chemisches Rechnen und Stöchiometrie

Ralf Schwarzbach

Chemisches Rechnen und Stöchiometrie

Ralf Schwarzbach, Mainz

2., völlig neu bearbeitete und erweiterte Auflage

Mit 40 Abbildungen, 20 Tabellen
und 143 Rechenbeispielen mit Lösungen

Wissenschaftliche
Verlagsgesellschaft
Stuttgart

Autor
Dr. Ralf Schwarzbach, Mainz
chemisches_rechnen@web.de

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter https://portal.dnb.de abrufbar.

2., völlig neu bearbeitete und erweiterte Auflage 2019
ISBN 978-3-8047-3515-6 (Print)
ISBN 978-3-8047-3882-9 (E-Book, PDF)

Birkenwaldstraße 44, 70191 Stuttgart
www.wissenschaftliche-verlagsgesellschaft.de
Printed in Germany

Satz: primustype Hurler GmbH, Notzingen
Indexer: Ines Reinhardt
Druck und Bindung: Kösel, Krugzell
Umschlagabbildung: fusebulb/shutterstock.com
Umschlaggestaltung: deblik, Berlin

Vorwort und Benutzerhinweise

Verehrte Leserin, verehrter Leser,
für die Einführung in das chemische Rechnen liegt nunmehr die zweite Auflage von „Chemisches Rechnen und Stöchiometrie“ vor. Als größte Neuerung in dieser Auflage möchte ich den mathematischen Teil (▸ Kap. 1) hervorheben. In der ersten Auflage war nur kurz aufgezählt, welche mathematischen Kenntnisse Sie für das Verständnis dieses Buches benötigen. In der Ihnen nun vorliegenden Auflage finden Sie die einzelnen Stoffgebiete der Mathematik in ▸ Kap. 1 erklärt, ergänzt durch Übungsaufgaben. Des Weiteren wurden einige Angaben und Beispiele erweitert und aktualisiert sowie weitere Abbildungen eingefügt.

Dieses Buch kann im Rahmen eines Chemiekurses (Gymnasium, Berufsausbildung, Studium) unterrichtsbegleitend verwendet werden. Chemische Sachverhalte sind im Text kurz erwähnt oder ausgeführt; jedoch ist es immer wichtig, ein Chemielehrbuch zur Hand zu haben. Dieses vor Ihnen liegende Lehrbuch ersetzt kein chemisches Lehrbuch; es unterstützt aber den Chemiekurs.

Viele Beispiele in diesem Buch sind Arzneibüchern entlehnt, weil es neben einer chemischen auch auf eine pharmazeutische Ausbildung (Beruf, Studium) zugeschnitten ist. Die Art der gewählten Beispiele ist jedoch für das Verständnis unerheblich, denn wir beschäftigen uns letztendlich mit „normaler“ Chemie. Deshalb ist dieses Buch auch für Benutzer, die keine pharmazeutische Ausbildung durchlaufen, geeignet.

Zum Aufbau des Lehrbuchs

Nach den Kapiteln zur Mathematik (▸ Kap. 1) und zu den Einheiten (▸ Kap. 2) beschäftigen wir uns zunächst mit den wichtigsten Konzentrationsmaßen in Chemie und Pharmazie (▸ Kap. 3) sowie mit Umrechnungen dieser Größen ineinander (▸ Kap. 4). Es folgt das Aufstellen von Reaktionsgleichungen (▸ Kap. 5), im Besonderen von Gleichungen für Redoxreaktionen. Das umfangreiche Kapitel zum stöchiometrischen Rechnen (▸ Kap. 6) schließt sich an. Wir besprechen weiterhin chemische Gleichgewichte und deren Anwendungen (▸ Kap. 7). Einige Betrachtungen zur Fehlerrechnung (▸ Kap. 8) beschließen das Buch. Im Anhang (▸ Kap. 9) wird neben der zitierten auch weiterführende Literatur angeführt; des Weiteren finden Sie Musterprotokolle für ein chemisches und chemisch-pharmazeutisches Praktikum (quantitative anorganische Analyse) sowie die Lösungen der Übungsaufgaben.

Was kann dieses Lehrbuch leisten?

Das Buch wird Sie als Laien mit chemischen Grundkenntnissen in das chemische Rechnen einführen, d. h., Sie erlernen den Umgang mit den verschiedenen Konzentrationsmaßen, das Aufstellen von chemischen Reaktionsgleichungen sowie das Rechnen im Labor (chemische Synthesen und Analysen) und mit chemischen Gleichgewichten.

Was kann dieses Lehrbuch nicht leisten?

Das Buch ist nicht geeignet, um tiefer in die Bereiche des chemischen Rechnens und der physikalischen Chemie vorzudringen. Für diesen Zweck gibt es spezielle weiterführende Lehrbücher (▸ Literaturverzeichnis). Auch ist der Bereich der chemischen Gleichgewichte viel umfangreicher, als er hier dargestellt ist. Studenten naturwissenschaftlicher Disziplinen können dieses Lehrbuch also nur als Einstieg verwenden. Kollegen mögen mir bitte nachsehen, dass ich im Rahmen eines einführenden Lehrbuchs, das auch für eine naturwissenschaftliche Berufsausbildung erarbeitet worden ist, auf viele Bereiche nur oberflächlich eingehen kann.

Noch ein Wort zu den **Übungsaufgaben:** Im ▸ Kap. 9.3 (Anhang) sind die **Lösungen** zu den Übungsaufgaben angegeben. Sie sollten zunächst versuchen, selbst auf das dort angegebene Ergebnis zu kommen. Wenn Sie mit einer Übungsaufgabe überhaupt nicht zurechtkommen, dann finden Sie im ▸ Kap. 9.4 die Lösungswege für einen Großteil der Rechenaufgaben.

Ferner möchte ich darauf verweisen, dass in diesem Buch aus Gründen der Übersichtlichkeit nur die männliche Form verwendet wird; es sind jedoch immer Frauen **und** Männer gemeint.

Gemeinsam mit anderen Autorenkollegen arbeite ich schon seit über 10 Jahren mit der Wissenschaftlichen Verlagsgesellschaft Stuttgart bzw. dem Deutschen Apotheker Verlag in verschiedenen Buchprojekten zusammen. Ich habe dabei die freundliche, professionelle und sehr kompetente Arbeitsweise der Verlagsgruppe kennen und schätzen gelernt. Bei diesem Buch unterstützten mich nach Kräften Herr Dr. Tim Kersebohm sowie Frau Kathrin Kisser und Frau Silvia Rädlein. Beim mathematischen Teil wurde ich von Frau Petra Buchheim (pensionierte Fachlehrerin für Mathematik aus Grimma in Sachsen) sowie von meinem Vater Dipl.-Ing. Kurt Schwarzbach (Jena) tatkräftig unterstützt und kritisch begleitet. Dafür gebührt ihnen Dank.

Ich hoffe, auch diese zweite Auflage findet Ihre Akzeptanz beim Einstieg in das chemische Rechnen. Für Ihre Ausbildung bzw. für Ihr Studium wünsche ich Ihnen alles Gute und viel Erfolg. An Ihren Meinungen, Hinweisen und an Ihrer sachdienlichen Kritik bin ich interessiert – gerne per E-Mail unter chemisches_rechnen@web.de.

Mainz, im Herbst 2018 Ralf Schwarzbach

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

Die Abkürzungen zu den physikalischen Größen und Einheiten finden Sie in ▸ Kap. 2.

DAB	Deutsches Arzneibuch
DAC	Deutscher Arzneimittel-Codex
EDTA	Ethylendiamin-tetraacetat (auch *engl.*: ethylenediamine tetraacetic acid)
EDTE	Ethylendiamin-tetraessigsäure
GG	Gleichgewicht
ggT	Größter gemeinsamer Teiler
JP	Japanisches Arzneibuch
kgV	Kleinstes gemeinsames Vielfaches
MWG	Massenwirkungsgesetz
NF	National Formulary (Anlage zum USP)
NIST	National Institute of Standards and Technology (US-amerikanische Standardisierungsbehörde)
NRF	Neues Rezeptur-Formularium (Anlage zum DAB)
Ph. Eur.	Pharmacopoea Europaea, Europäisches Arzneibuch
Ph. Helv.	Pharmacopoea Helvetica, Schweizerisches Arzneibuch
PSE	Periodisches System (oder Periodensystem) der Elemente
PTB	Physikalisch-Technische Bundesanstalt
USP	The United States Pharmacopeia, Arzneibuch der USA
Y^{4-}	Das ist in diesem Buch kein Yttrium-Anion (existiert auch nicht), sondern das vollständig deprotonierte Anion der EDTE, also das EDTA-Teilchen (▸ Kap. 6.4.3)

1 Mathematische Grundlagen

An dieser Stelle wollen wir uns zunächst kurz mit den mathematischen Grundlagen, die Sie für das Arbeiten mit diesem Buch benötigen, beschäftigen. Dazu sind Realschulkenntnisse ausreichend (die aber auch wirklich beherrscht werden sollten!). Wir beginnen mit den Grundrechenarten und dem Lösen einfacher algebraischer und quadratischer Gleichungen sowie dem Lösen von Gleichungssystemen, sprechen über das Potenzieren und Logarithmieren sowie über Proportionen und Dreisatz (u. a. mit dem Spezialfall Prozentrechnung) und schließen dieses Kapitel mit Berechnungen zu Mittelwerten (arithmetisches Mittel) ab.

Wenn Sie diese Bereiche der Schulmathematik sicher beherrschen, dann blättern Sie bitte gleich weiter zu den nächsten Kapiteln.

1.1 Grundrechenarten

1.1.1 Zahlenbereiche

Bis zur 10. Klasse haben Sie in der Schule verschiedene Zahlenbereiche kennengelernt: natürliche Zahlen, gebrochene Zahlen, ganze Zahlen, rationale und irrationale Zahlen, reelle Zahlen. Der letztgenannte Zahlenbereich ist der, der alle vorstehenden umfasst. Begonnen haben Sie mit den natürlichen Zahlen, ein Bereich, der die Zahlen von 0; 1; 2; 3; 4; 5 usw. bezeichnet. Die natürlichen Zahlen und deren negative Entsprechungen ergeben den Bereich der ganzen Zahlen.

Die Zahlen, die sich als Bruch der Form $\frac{n}{m}$ darstellen lassen, bilden den Zahlenbereich der gebrochenen Zahlen. Dabei sind n und m natürliche Zahlen ($m \neq 0$). Die natürlichen Zahlen selbst sind auch spezielle gebrochene Zahlen (z. B: $\frac{15}{5} = 3$ oder $4{,}0 = 4$). Die natürlichen und gebrochenen Zahlen und deren negative Entsprechungen sind die rationalen Zahlen.

Darüber hinaus gibt es noch Zahlen, die nur näherungsweise dargestellt werden können, beispielsweise die Zahl π (durch einen unendlich langen Dezimalbruch) oder $\sqrt{2}$. Diese Zahlen heißen irrationale Zahlen. Der Bereich der reellen Zahlen fasst die rationalen und irrationalen Zahlen zusammen.

Abb. 1.1 zeigt einige Beispiele aus den Zahlenbereichen anhand einer Zahlengeraden. Alle Beispiele darin sind reelle Zahlen.

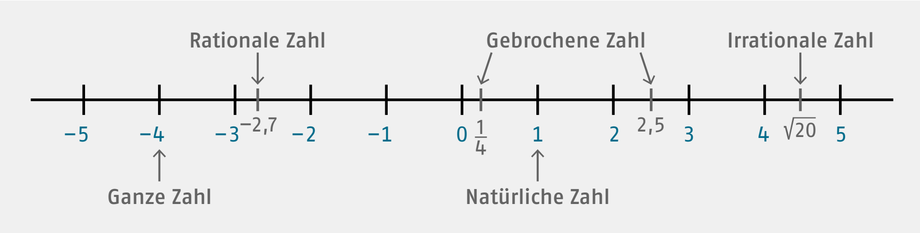

Abb. 1.1 Zahlengerade mit Beispielen zu den Zahlenbereichen

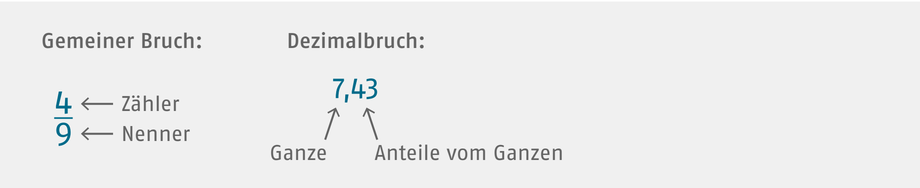

Abb. 1.2 Beispiele für gebrochene Zahlen

Bei den gebrochenen Zahlen unterscheiden wir zwischen gemeinen (= gewöhnlichen) Brüchen und Dezimalbrüchen (= Dezimalzahlen), vgl. Abb. 1.2.

1.1.2 Addition und Subtraktion

Zunächst einige Begriffe: Die Glieder einer Addition bezeichnen wir als **Summanden**, deren Ergebnis als **Summe**. Bei einer Subtraktion werden von einem **Minuenden** ein oder mehrere **Subtrahenden** abgezogen. Man erhält dann eine **Differenz.**

Summanden dürfen vertauscht werden (→ **Kommutativgesetz**), ohne dass sich das Ergebnis (die Summe) verändert. Bei der Subtraktion ist das nicht möglich, denn die Differenz wäre dann im Allgemeinen eine andere.

Beispiel 1.1

$3 + 4 = 7$	$4 + 3 = 7$	$7 = 7$
Aber:		
$9 - 2 = 7$	$2 - 9 = -7$	$7 \neq -7$

Wenn Klammern vorkommen, dann gilt grundsätzlich, dass der Klammerinhalt zuerst berechnet wird. Dabei darf beim Addieren die Klammer beliebig gesetzt werden (**Assoziativgesetz**):

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b$$

Hier sehen Sie, dass ein „+“ vor der Klammer deren Inhalt nicht verändert. Ein Minus („–“) jedoch kehrt alle Vorzeichen in der Klammer um.

Bei der Addition und Subtraktion physikalischer Größen (▸ Kap. 2.2) müssen diese zunächst durch Umrechnen auf die gleiche Einheit gebracht werden. Erst dann darf addiert bzw. subtrahiert werden.

Dezimalbrüche werden heute meist mit dem Taschenrechner addiert und subtrahiert. Beim schriftlichen Rechnen werden sie so aufgeschrieben, dass Komma unter Komma steht.

Für das Addieren und Subtrahieren von gemeinen Brüchen müssen diese vorher auf einen gemeinsamen Nenner (den Hauptnenner) gebracht werden. Dies geschieht durch das sogenannte **Erweitern**. Ein gemeiner Bruch wird erweitert, indem man dessen Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert. Der Wert des Bruches ändert sich dabei nicht.

Beispiel 1.2

Der Bruch $\frac{2}{7}$ sei mit 3 zu erweitern:

$$\frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{6}{21}$$

Es gilt: $\frac{2}{7} = \frac{6}{21}$

Der umgekehrte Vorgang wird als **Kürzen** bezeichnet, d. h., das Teilen von Zähler und Nenner durch dieselbe natürliche Zahl. Für End- oder Zwischenergebnisse wird vereinbarungsgemäß soweit wie möglich gekürzt; es gibt dann außer 1 keine natürliche Zahl mehr, die Teiler von Zähler und Nenner sind.

Beispiel 1.3

Der Bruch $\frac{17}{51}$ sei soweit wie möglich zu kürzen.
Der größte gemeinsame Teiler (ggT) von Zähler und Nenner ist hier 17.

$$\frac{17}{51} = \frac{17:17}{51:17} = \frac{1}{3}$$

Es gilt auch hier: $\frac{17}{51} = \frac{1}{3}$

Das Kürzen hat einen ganz praktischen Vorteil: Brüche, die so weit wie möglich gekürzt wurden, sind Brüche mit kleinen Zahlen. Man vermeidet damit das Weiterrechnen mit unnötig großen Zahlen.

Zum Addieren und Subtrahieren von gemeinen Brüchen werden diese erweitert, bis sie einen gemeinsamen Nenner (den Hauptnenner) haben, und dann die Zähler addiert bzw. subtrahiert (vgl. Beispiel 1.4).

Beispiel 1.4

Man berechne:

$$\frac{3}{5} + \frac{7}{11} - \frac{3}{20} - \frac{1}{6} = \frac{396 + 420 - 99 - 110}{660} = \frac{607}{660}$$

Kürzen kann man hier nicht mehr, weil 607 und 660 keinen gemeinsamen Teiler haben (außer 1).

1.1.3 Multiplikation und Division

Auch hier zunächst einige Begriffe: Die Glieder einer Multiplikation sind die **Faktoren**. Diese können wie Summanden vertauscht werden. Das Ergebnis ist ein **Produkt**; es gilt somit auch das Assoziativ- und Kommutativgesetz. Nicht vertauscht werden dürfen jedoch der Dividend und der Divisor, die Glieder einer Division. Der **Dividend** ist die Zahl, *die* geteilt wird; der **Divisor** die Zahl, *durch* die geteilt wird. Wir erhalten einen **Quotienten** als Ergebnis der Division (○ Abb. 1.3).

Gemeine Brüche werden multipliziert, wobei sich ein neuer gemeiner Bruch ergibt, in dessen Zähler das Produkt aller Zähler der Faktoren und im Nenner das Produkt aller Nenner der Faktoren erscheinen. Dieser neue Bruch wird üblicherweise soweit wie möglich gekürzt.

1

Multiplikation:

$2 \cdot 5 = 10$

Faktoren Produkt

Division:

$20 : 8 = 2{,}5$ ← Quotient

Dividend Divisor

Abb. 1.3 Multiplikation und Division

Beispiel 1.5

Man berechne:

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{160} = \frac{3}{80}$$

Es kann auch schon vor dem Multiplizieren der Zähler und Nenner gekürzt werden, wenn dies möglich ist. Man erspart sich damit große Zahlen.

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{2^*}{5} \cdot \frac{3}{4^*} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{80} \quad (\text{* der Teiler ist } 2)$$

Eine Division gemeiner Brüche wird immer in eine Multiplikation umgewandelt, indem der Dividend mit dem Kehrwert (= dem Reziproken) des Divisors multipliziert wird. Somit gilt für eine Division auch das soeben Besprochene für eine Multiplikation.

Beispiel 1.6

Man berechne:

$$\frac{4}{9} : \frac{3}{18} = \frac{4}{9} \cdot \frac{18}{3} = \frac{72}{27} = \frac{8}{3}$$

Dezimalbrüche werden heute in der Regel mit einem Taschenrechner multipliziert und dividiert. Deshalb soll hier nicht auf das schriftliche Multiplizieren und Dividieren eingegangen werden.

1.2 Einfache und quadratische Gleichungen

1.2.1 Lösen von einfachen algebraischen Gleichungen

Einfache algebraische Gleichungen, die eine unbekannte Größe x enthalten, sind Gegenstand dieses Abschnitts. Eine solche Gleichung zu lösen heißt, die Variable x durch sogenannte äquivalente Umformungen zu isolieren und damit zu berechnen. Dazu werden Rechenoperationen angewendet, die die Ausgangsgleichung in eine einfachere äquivalente Gleichung überführen, und zwar so lange, bis das x auf einer Seite und ein nicht weiter zu vereinfachender Term (= eine Zahl, ein Parameter oder eine physikalische Größe) auf der anderen Seite steht.

MERKE Man erhält zu einer bestehenden Gleichung eine **äquivalente Gleichung**, wenn auf **beiden** Seiten **ein und dieselbe Rechenoperation** ausgeführt wird. Dabei wird immer mit der entgegengesetzten Rechenoperation gearbeitet.

Beispiel 1.7

Beispiele für Lösungen einfacher algebraischer Gleichungen:

$x = 5a$ (a ist ein Parameter)
$x = -7$
$x = 45\,\text{kg}$

Zur Probe muss das Ergebnis in die Ausgangsgleichung eingesetzt werden. Dabei muss sich auf beiden Seiten der Gleichung die gleiche Zahl/Größe ergeben.

MERKE Umformungen zu einfachen Gleichungen (wie in Beispiel 1.7) laufen prinzipiell folgendermaßen ab:
1. Ordnen
2. Zusammenfassen
3. Dividieren
4. Probe

Wir sehen uns zwei Beispiele an.

Beispiel 1.8

Die Gleichung $x + 7 = 11 + 3x$ sei zu lösen.

1. Schritt: Wir bringen die Terme, die die unbekannte Größe x enthalten, auf eine Seite: Auf beiden Seiten wird x subtrahiert.

$x + 7 = 11 + 3x \quad | -x$

$x + 7 - x = 11 + 3x - x$ (Die neue Gleichung liefert weiterhin eine wahre Aussage.)

Zusammengefasst:

$7 = 11 + 2x$

2. Schritt: Wir bringen die Terme, die x nicht enthalten, auf die andere Seite der Gleichung: Auf beiden Seiten wird 11 subtrahiert.

$7 = 11 + 2x \quad | -11$

$7 - 11 = 11 + 2x - 11$

Zusammengefasst:

$-4 = 2x$

3. Schritt: Wir formen die neu entstandene Gleichung so um, dass x nur noch den Faktor 1 hat: Beide Seiten werden durch 2 geteilt.

$-4 = 2x \quad | : 2$

$$\frac{-4}{2} = \frac{2x}{2}$$

Dividiert: $x = -2$ (Die Seiten können vertauscht werden.)

4. Schritt: *Probe:* Einsetzen der Lösung in die Ausgangsgleichung: Es muss sich eine wahre Aussage ergeben.

$-2 + 7 = 11 + 3 \cdot (-2)$

$5 = 5$ → **Wahre Aussage!**

Beispiel 1.9

Die Gleichung $\frac{x+1}{x-1} = 5$ sei zu lösen.
Die Lösungsmenge darf nicht 1 enthalten (Division durch Null nicht möglich!).

1. Schritt: Wir lösen den Bruch auf: Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit dem Nenner.

$$\frac{x+1}{x-1} = 5 \qquad | \cdot (x-1)$$

$$\frac{(x+1)\cdot(x-1)}{x-1} = 5\cdot(x-1)$$

Vereinfacht durch Kürzen: $x + 1 = 5 \cdot (x - 1)$

2. Schritt: Auf der rechten Seite wird die Klammer aufgelöst:

$x + 1 = 5 \cdot x - 5 \cdot 1$

Zusammengefasst: $x + 1 = 5x - 5$

3. Schritt: Wie 1. Schritt in Beispiel 1.8: Auf beiden Seiten wird x subtrahiert.

$x + 1 = 5x - 5 \qquad | - x$

$x + 1 - x = 5x - 5 - x$

Zusammengefasst: $1 = 4x - 5$

4. Schritt: Wie 2. Schritt in Beispiel 1.8: Auf beiden Seiten wird 5 addiert.

$1 = 4x - 5 \qquad | + 5$

$1 + 5 = 4x - 5 + 5$

Zusammengefasst: $6 = 4x$

5. Schritt: Wie 3. Schritt in Beispiel 1.8: Beide Seiten werden durch 4 geteilt.

$6 = 4x \qquad | : 4$

$$\frac{6}{4} = \frac{4x}{4}$$

Dividiert: $x = \frac{3}{2}$ (Die Seiten können vertauscht werden.)

6. Schritt: *Probe:* Einsetzen der Lösung(en) in die Ausgangsgleichung:

$$\frac{\frac{3}{2}+1}{\frac{3}{2}-1} = 5$$

$$\frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} = 5$$

$\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{1} = 5$ (▸Kap. 1.1.3)

$5 = 5$ → **Wahre Aussage!**

Beim chemischen Rechnen werden Sie häufig Gleichungen zu lösen haben, die diesen Beispielen entsprechen.

1.2.2 Lösen von quadratischen Gleichungen

Mitunter treffen Sie beim chemischen Rechnen auf quadratische Gleichungen. Aus der Schule sollten Ihnen dazu zwei Möglichkeiten bekannt sein, diese zu lösen: mithilfe der p-q-Formel oder mithilfe der quadratischen Ergänzung.

Allgemeine Form: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

Quadratisches Glied — Lineares Glied — Absolutes Glied

Normalform: $x^2 + p \cdot x + q = 0$

Abb. 1.4 Allgemeine und Normalform einer quadratischen Gleichung

Zunächst wollen wir uns vergegenwärtigen, was eine quadratische Gleichung überhaupt ist. Man unterscheidet die sogenannte **allgemeine Form** und die **Normalform** einer quadratischen Gleichung (Abb. 1.4). Zu diesen beiden Formen lassen sich alle quadratischen Gleichungen umformen.

Die Normalform leitet sich aus der allgemeinen Form ab, indem diese durch den Faktor a geteilt wird.
Es gilt: $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$

Lösen mithilfe der p-q-Formel

Wenn eine quadratische Gleichung mit der p-q-Formel gelöst werden soll, dann muss diese zuvor durch entsprechende äquivalente Umformungen auf die Normalform (Abb. 1.4) gebracht werden. Anschließend kann die Gleichung mit folgender Formel gelöst werden:

p-q-Formel: $$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Den Ausdruck $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ minus q, der unter der Wurzel steht, bezeichnen wir als **Diskriminante D**.

Wenn die Diskriminante größer als Null ist, dann hat die Gleichung zwei Lösungen. Ist D gleich Null, dann liegt eine Lösung vor, und zwar minus $\frac{p}{2}$. Wenn D kleiner als Null ist, dann hat die Gleichung keine Lösung (Ausdruck unter der Wurzel negativ!).

Beispiel 1.10

Die Gleichung $x^2 - 4x - 32 = 0$ sei zu lösen. Hierbei ist $p = -4$ und $q = -32$.

1. Schritt: Einsetzen in die p-q-Formel und Auflösen:

$$x_{1/2} = \frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + 32}$$

$$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4 + 32}$$

$$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{36}$$

$$x_{1/2} = 2 \pm 6$$

$x_1 = -4$; $x_2 = 8$

2. Schritt: Probe: Einsetzen der Lösungen in die Ausgangsgleichung (vgl. ▸Kap. 1.2.1):

Für x_1: $(-4) \cdot (-4) - 4 \cdot (-4) - 32 = 0$

$16 + 16 - 32 = 0$ → **Wahre Aussage!**

Für x_2: $8 \cdot 8 - 4 \cdot 8 - 32 = 0$

$64 - 32 - 32 = 0$ → **Wahre Aussage!**

Lösen durch Ermittlung der quadratischen Ergänzung

Hierbei wird die Normalform einer quadratischen Gleichung in eine binomische Formel der Form $(a + b)^2 = e$ bzw. $(a - b)^2 = e$ überführt und nach x aufgelöst.

Zum Mitdenken

Suchen Sie sich aus einem Mathematiklehrbuch oder einem Tafelwerk für Realschulen die drei binomischen Formeln heraus und machen Sie sich mit ihnen vertraut. (Vergleiche z. B. auch den Wikipedia-Artikel „Binomische Formeln“).

Für das folgende Beispiel 1.11 nehmen wir noch einmal die Gleichung aus Beispiel 1.10. Sie werden sehen, dass sich dieselben Lösungen ergeben.

Beispiel 1.11

Die Gleichung $x^2 - 4x - 32 = 0$ sei zu lösen.

1. Schritt: Quadratische Ergänzung zu $x^2 - 4x$

$x^2 - 4x = x^2 - 2 \cdot 2x$

Das b in dieser binomischen Formel ist 2; die quadratische Ergänzung muss also 4 sein ($= 2^2$):

$x^2 - 2 \cdot 2x + 4$

Angabe als binomische Formel:

$x^2 - 2 \cdot 2x + 4 = (x - 2)^2$

2. Schritt: Einsetzen der gewonnenen binomischen Formel in die Gleichung:

$x^2 - 4x - 32 = 0$

$(x - 2)^2 - 4 - 32 = 0$

$(x - 2)^2 - 36 = 0$

Wir haben mit dem Term $(x - 2)^2$ die Zahl +4 zusätzlich mit auf die linke Seite genommen. Weil aber die Gleichheit auf beiden Seiten der Gleichung gewahrt bleiben muss, wird diese Zahl gleich wieder subtrahiert.

3. Schritt: Lösung der neu gewonnenen Gleichung:

$(x - 2)^2 - 36 = 0 \quad | + 36$

$(x - 2)^2 = 36 \quad |$ Radizieren

$\sqrt{(x - 2)^2} = \sqrt{36}$

$x - 2 = \pm 6 \quad | + 2$

$x = \pm 6 + 2$

$x_1 = -4;\ x_2 = 8$

4. Schritt: Auch hier muss eine Probe durch Einsetzen der Ergebnisse in die Ausgangsgleichung durchgeführt werden. Dies ist im vorstehenden Beispiel 1.10 bereits geschehen.
