

Reimer Kornmann

# Mathematik: für Alle von Anfang an!



**KLINKHARDT**

**KORNMANN  
MATHEMATIK: FÜR ALLE  
VON ANFANG AN!**



MATHEMATIK: FÜR ALLE  
VON ANFANG AN!

von  
Reimer Kornmann

VERLAG  
JULIUS KLINKHARDT  
BAD HEILBRUNN • 2010



*Für Brigitte*

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek  
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen  
Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet abrufbar über  
<http://dnb.d-nb.de>.

2010.10.Kl. © by Julius Klinkhardt.

Das Werk ist einschließlich aller seiner Teile urheberrechtlich geschützt.

Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne  
Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen,  
Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen  
Systemen.

Titelfoto: „Louisa“ von Daniel Oberholz

Druck und Bindung: AZ Druck und Datentechnik, Kempten.

Printed in Germany 2010.

Gedruckt auf chlorfrei gebleichtem alterungsbeständigem Papier.

ISBN 978-3-7815-1767-7

# Inhalt

Vorwort.....	7
0 Einleitender Überblick .....	13
1 Zum Aufgabenbereich der Pädagogik unter allgemeiner Perspektive: Konsequenzen für die Ausbildung und Weiterentwicklung pädagogischer Professionalität .....	19
2 Zum Verständnis von Mathematik für den Unterricht in der Primarstufe.....	27
2.1 Was ist Mathematik? .....	27
2.2 Grundlegende mathematische Sachverhalte .....	42
2.3 Zur Bedeutung der Mathematik für Bildung und Erziehung.....	48
3 Zum Erwerb der Grundlagen mathematischer Kompetenzen im Kleinkind- und Vorschulalter .....	51
3.1 Exkurs zu Theorien und Modellen menschlicher Entwicklung.....	51
3.2 Die Theorie von der Abfolge der dominierenden Tätigkeiten und ihr Bezug zum Erwerb basaler mathematischer Kompetenzen .....	55
3.3 Einflüsse der Erziehung in Familie und Kindergarten auf den Erwerb pränumerischer und numerischer Fähigkeiten.....	70
3.4 Psychologische Modelle des Erwerbs mathematischer Kompetenzen.....	86
3.5 Diagnostik des Lernstands vor der Einschulung: günstige und ungünstige Prognosen und Möglichkeiten der gezielten Förderung.....	90
4 Zur inhaltlichen und methodischen Gestaltung des Mathematikunterrichts in der Primarstufe.....	101
4.1 Zum Grundsatz der Lebensnähe und praktischen Bedeutsamkeit.....	106
4.2 Zur Bedeutung aktiv-entdeckenden Lernens für den Erwerb mathematischer Einsichten und die Entwicklung mathematischen Denkens.....	110
4.3 Zum Stellenwert und zur Qualität der Übungspraxis.....	112
5 Schulanfang: Überlegungen und Befunde.....	115
5.1 Inzidentelles und intentionales Lernen .....	115
5.2 Befunde zum Lernstand bei Schulanfang.....	117

6	Anfangsunterricht .....	123
6.1	Förderung elementarer mathematischer Kompetenzen im Rahmen sachkundlicher Themen .....	123
6.2	Operieren mit Zahlen.....	138
6.3	Üben und Automatisieren .....	179
7	Hinweise auf Erfahrungsdefizite und ungünstige Lernvoraussetzungen – Konsequenzen für pädagogisches Denken und Handeln.....	185
	Nachwort .....	189
	Literaturverzeichnis .....	191

## Vorwort

Noch immer gibt es in unserer Gesellschaft viele Menschen, die – unabhängig von Alter und sozialer Herkunft – keinen tragfähigen Zugang zur Mathematik gefunden oder diesen wieder verloren haben. Für diese Behauptung gibt es recht deutliche Belege: Beispielsweise zeigen die Ergebnisse internationaler Vergleichsstudien, dass ein sehr hoher Anteil deutscher Schülerinnen und Schüler mit einfachen Mathematik-Aufgaben überfordert ist, oder Berichte von Studierenden der Pädagogik und Sonderpädagogik lassen erkennen, dass viele von ihnen Mathematik vor allem mit leidvollen Erinnerungen an totales Versagen gegenüber den schulischen Anforderungen verbinden. Dieser ungute Zustand ist nicht mit dem Fehlen geeigneter pädagogischer Vermittlungskonzepte zu erklären. So sind in den zurückliegenden Jahren einige hervorragende Hand- und Arbeitsbücher für Lehrerinnen und Lehrer publiziert worden, die eine Fülle leicht realisierbarer praktischer Vorschläge für einen interessanten, anregenden und erfolgreichen Mathematikunterricht in der Primarstufe bieten und dabei auch Hilfen für Kinder mit ungünstigen Lernvoraussetzungen und eingeschränkten Lernmöglichkeiten vorsehen. Diese unterrichtsbezogenen Darstellungen werden sinnvoll ergänzt durch einige didaktisch gut durchdachte Lehrwerke und Übungsmaterialien. Weiterhin finden sich in mehreren ansprechend aufgemachten, sorgfältig redigierten und – zum Teil – speziell für einzelne Schularten und Schulstufen zugeschnittenen Fachmagazinen anschauliche Praxisbeispiele und Unterrichtsvorschläge für Lehrkräfte. Diese Erkenntnisse haben zum Teil auch Eingang in die Lehrerbildung gefunden, und es fehlt auch nicht an qualifizierten Fortbildungsangeboten und soliden Handreichungen, die allen Lehrkräften zugänglich sind.

Jedoch: Wahrscheinlich bedingt durch die eingangs erwähnten negativen Erfahrungen, haben manche Lehrpersonen und Eltern ein sehr eingegengtes Verständnis von Mathematik erworben und Aversionen gegenüber diesem Gegenstandsbereich entwickelt. Deshalb dürfte es ihnen schwer fallen, den Kindern zu einem problemlosen Zugang zur Mathematik zu verhelfen. Speziell an diesen Personenkreis wenden sich einige interessant geschriebene und leicht verständliche Abhandlungen, welche die lebendigen und lebensfrohen Seiten des als trocken und zäh geltenden Lehr- und Lerngegenstands Mathematik aufzeigen.

Doch alle diese Bemühungen scheinen noch zu selten in der Unterrichtspraxis wirksam zu werden – und diese Erkenntnis hat inzwischen auch Eingang in den fachlichen Diskurs gefunden.

So wird seit einiger Zeit auch auf „didaktogene“, also unterrichtsbedingte, Ursachen hingewiesen, wenn es um die Analyse von Rechenschwierigkeiten (Rechen-



störungen, Dyskalkulie) geht. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Qualität der realen Unterrichtsgestaltung oft deutlich hinter den realisierbaren Möglichkeiten zurückbleibt und sich daher negativ auf den Lernerfolg und den Leistungsstand einzelner Schülerinnen und Schüler auswirkt. Ein solcher Erklärungsansatz erweitert die Perspektive auf die Problematik erheblich: Lange Zeit herrschten nämlich Erklärungskonzepte vor, welche die Schwierigkeiten mit den mathematischen Anforderungen allein auf kognitive Defizite und andere individuelle Merkmale der Lernenden zurückführten. Demgegenüber heben neuere pädagogisch und entwicklungstheoretisch orientierte Ansätze auch die Bedeutung konkreter gegenstandsbezogener Erfahrungen hervor, die mit der Qualität der außerschulischen und schulischen Lern- und Lebensbedingungen zusammenhängen. Folglich konzentrieren sich die hieran orientierten Fördermaßnahmen darauf, den Kindern die notwendigen mathematischen Vorkenntnisse und Wissens Elemente zu vermitteln, auf denen der Erwerb weiterer Kompetenzen aufbauen kann. Auch für diesen Aufgabenbereich liegen geeignete Fördermaterialien vor, deren Anwendungsmöglichkeiten in der umfangreichen Fachliteratur gut beschrieben und erläutert sind.

Offensichtlich haben aber die eigentlich leicht zugänglichen, anschaulich beschriebenen, gut erprobten und theoretisch überzeugenden pädagogischen Konzepte nicht in genügendem Maße Eingang in die Praxis der vorschulischen und schulischen Förderung gefunden. Dies scheint ein wesentliches Problem zu sein, das für die anhaltenden Lernschwierigkeiten einzelner Schülerinnen und Schüler im mathematischen Lernbereich mit verantwortlich sein dürfte.

Mit der vorliegenden Schrift kann ich nun kein Patent-Rezept zur Lösung dieses Problems bieten. Das Bewusstsein dieser Problematik hat mich aber dazu inspiriert, darüber nachzudenken, wie möglichst vielen Menschen wesentliche Grundlagen mathematischen Denkens erschlossen werden können. Die Ergebnisse dieser Überlegungen liegen nun vor. Schwerpunktmäßig beziehen sie sich auf die Entwicklung der Kinder, die in Familie, Kindergarten, Hort und Schule, aber auch im Rahmen von speziellen sonderpädagogischen bzw. therapeutischen Hilfen unterstützt werden sollen. Dabei versuche ich, Zusammenhänge zwischen grundlegenden Kategorien menschlicher Entwicklung und der Ausbildung mathematischen Denkens aufzuzeigen. Dadurch kann der gedankliche Rahmen so weit gespannt werden, dass kein Kind von dem Zugang zur Mathematik ausgeschlossen bleibt. Insofern ist diese Schrift dem Gedanken der Inklusion, also einer Pädagogik für Alle, verpflichtet.

Bei einem solchen Versuch muss man sich von der gängigen Vorstellung lösen, dass die frühesten Berührungen eines Menschen mit der Mathematik erst auf einer fortgeschrittenen Stufe seiner geistigen Entwicklung erfolgen können. Gegen eine solche Auffassung sprechen auch die Ergebnisse einiger experimenteller

Studien, wonach schon Säuglinge eine Sensibilität für unterschiedlich mächtige Mengen und für die Ergebnisse einfacher Operationen mit diesen zeigen. Darüber hinaus legen es Interpretationen der entwicklungstheoretischen Arbeiten von A. N. Leontjew, einem wichtigen Vertreter der von L. S. Wygotski begründeten Kulturhistorischen Schule sowjetischer Psychologen, nahe, bereits in den ersten Lebensäußerungen Neugeborener wesentliche Grundlagen für die Entwicklung mathematischen Denkens zu erkennen. So lassen sich mit diesem theoretischen Ansatz wichtige Grundzüge sowohl der individuellen als auch der menschheitsgeschichtlichen Entwicklung mathematischen Denkens beschreiben und erklären. Besonders interessant ist an diesem tätigkeitstheoretischen Ansatz auch, dass das pädagogische Handeln darin einen zentralen Stellenwert einnimmt.

Mit dieser Akzentuierung – Berücksichtigung der menschlichen Entwicklung von Anfang an, Verbindung zur Kulturgeschichte, systematische Einordnung der Pädagogik unter Einbezug bedeutsamer fachdidaktischer Entwürfe – ergänzt die vorliegende Darstellung die konstruktivistischen, kognitivistischen und neuropsychologischen Ansätze, die den aktuellen fachlichen Diskurs zum Thema Rechenschwäche und Dyskalkulie bestimmen. Sicherlich steht die tätigkeitstheoretische Position in keinem unüberbrückbaren Gegensatz zu den genannten Ansätzen, und so hoffe ich, dass die vorliegende Schrift auch zur Belebung der theoretischen Diskussion und zur Weiterentwicklung hilfreicher pädagogischer Konzepte beiträgt. So soll sie all denen einen Orientierungsrahmen geben, die sich den Aufgabenbereich Mathematik im Elementar- und Primarbereich – auch für Kinder mit größeren Lernschwierigkeiten – erschließen wollen: also angehende und bereits tätige Fachkräfte in Kindergärten, Studierende und Referendare der Pädagogik und Sonderpädagogik, aber auch ausgebildete Lehrkräfte und Therapeuten, die ihr erworbenes fachliches Wissen überprüfen und gegebenenfalls erweitern wollen, schließlich auch Eltern von Kindern mit Rechenschwierigkeiten, von denen sich nicht wenige autodidaktisch ein beachtliches Expertenwissen angeeignet haben und dieses ständig erweitern.

Ein besonderes Anliegen ist es mir aber, drei verschiedene Gruppen von Lehrerinnen und Lehrern an Grund- und Förderschulen zu erreichen:

- zum einen solche, die Mathematik unterrichten müssen, dies aber ungern tun, weil sie während ihrer eigenen Schulzeit negative Erfahrungen mit diesem Gegenstandsbereich gemacht haben und diesem Fach ablehnend gegenüberstehen,
- weiterhin solche, die Mathematik zwar keineswegs ablehnen, vielleicht sogar recht gern unterrichten mögen, aber aufgrund unzureichenden fachdidaktischen Wissens ihren Schülerinnen und Schülern nicht die Lernmöglichkeiten bieten, die ihren Begabungen entsprechen,
- schließlich solche, die während ihrer Schulzeit nie Probleme mit den Anforderungen des Mathematikunterrichts hatten und die deshalb kaum verstehen

können, dass und warum sich einige ihrer Schülerinnen und Schüler mit diesem Fach so schwer tun.

Ich selbst hatte als Schüler – insbesondere in den letzten Schuljahren – deutliche Probleme mit den Lernanforderungen in Mathematik. Diese Probleme blieben mir auch nach der Schulzeit stets bewusst, als ich im Rahmen meines Psychologiestudiums mathematisch basierte Forschungsmethoden erlernen und diese bei meinen Qualifikationsarbeiten und später auch bei meiner Dissertation anwenden musste. Gerade dieses Bewusstsein erleichterte es mir, die besonderen Hindernisse zu erkennen, die dem Verständnis entscheidender Gedankengänge im Wege stehen. Diese Erkenntnisse konnte ich später gut nutzen, als ich bei meinen Tätigkeiten als Hochschullehrer den Studierenden Grundkenntnisse in Statistik und Testtheorie zu vermitteln hatte: Das Wissen um solche Schwierigkeiten befähigte mich, gerade auch auf solche „einfachen“ Probleme lösungsorientiert einzugehen, die mathematisch versierte Kolleginnen und Kollegen gar nicht als solche wahrnehmen, und über die sie deswegen in der Lehre einfach hinweggehen, womit sie dann einen Teil der Studierenden von den Studieninhalten isolieren.

Auch die in dieser Schrift behandelten Themen und Inhalte wurden mir durch meine Tätigkeit als Hochschullehrer im Bereich der Sonderpädagogik wichtig. Ich hatte an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg eine Professur für „Diagnostik der Lernbehinderten“ inne. Bei der Entwicklung pädagogisch angemessener Fragestellungen für die Diagnostik orientierte ich mich an den Problemwahrnehmungen der Lehrkräfte in der Schulpraxis. Bei der systematischen Aufbereitung und Analyse dieser Problemwahrnehmungen wurde mir zunehmend klar, dass die von den Lehrkräften festgestellten Probleme stets auch mit deren eigener Praxis zusammenhängen. Folglich musste sich die Diagnostik auch und gerade auf die Qualität der pädagogischen Praxis einlassen und an den Inhalten anknüpfen, in denen sich die Problemwahrnehmungen häuften. Neben den Bereich des Erwerbs und Gebrauchs der Schriftsprache und – bei Kindern mit Migrationshintergrund – des Gebrauchs der Zweitsprache Deutsch betraf dies die Anforderungen des Mathematikunterrichts. Zu diesem Themenbereich habe ich lange Zeit während meiner Dienstzeit an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg und nach meiner Pensionierung an der Goethe-Universität Frankfurt Lehrveranstaltungen angeboten. Diese zielten darauf ab, realisierbare Bedingungen für einen besseren Lernerfolg einzelner Kinder und Jugendlicher mit Lernschwierigkeiten im mathematischen Bereich zu erkennen und pädagogische Umsetzungen dieser Erkenntnisse zu planen, durchzuführen, zu kontrollieren und zu sichern. Bei der durchweg lebendigen Zusammenarbeit mit interessierten Studierenden eröffneten sich auch einige noch nicht untersuchte Fragestellungen, denen in mehreren, auch von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanziell geförderten Forschungsprojekten nachgegangen werden konnte.

Meine eigenen mathematischen Kenntnisse gehen nur so weit, dass ich grundlegende Einführungen für den Grundschulunterricht in Mathematik verstehen und deren unterrichtspraktische Bedeutung einschätzen kann. Nicht wenige solcher mathematikdidaktischer Abhandlungen habe ich mit Freude und Gewinn gelesen. Dabei habe ich darüber nachgedacht, welche Erkenntnisse es mir selbst denn ermöglicht haben, einen solchen Zugang zu den Grundlagen der Mathematik zu finden. Mit der vorliegenden Schrift versuche ich nun, diese Erkenntnisse so darzustellen, dass neben den schon angesprochenen Personenkreisen insbesondere die drei oben beschriebenen Zielgruppen von Lehrpersonen daran partizipieren können und dazu angeregt werden, sich mit dem einen oder anderen mathematikdidaktischen Lehrwerk zu beschäftigen. Damit sei klar gesagt: Die vorliegende Schrift dient lediglich als Propädeutikum, versteht sich also als eine ganz einfache Hinführung zur Mathematik und zur Mathematikdidaktik für den Elementar- und Primarbereich. Darüber hinaus gehende Ansprüche und Erwartungen kann und will sie nicht erfüllen. Inhaltlich anspruchsvoller sind hingegen die Ausführungen zu grundsätzlichen pädagogischen, lern- und entwicklungstheoretischen Positionen gehalten, die den allgemeinen Rahmen für die speziellen mathematischen und mathematikdidaktischen Inhalte bilden.

Speziell die in dieser Schrift behandelten Themen entsprechen weitgehend den Inhalten einer Vorlesung, die ich im Wintersemester 2009/2010 an der Goethe-Universität Frankfurt für Studierende der Sonderpädagogik gehalten habe. Es handelte sich um eine Pflichtveranstaltung für Anfangssemester. Anstelle der üblichen Teilnahmenachweise durch Eintragung in Anwesenheitslisten erbat ich von den Studierenden, mir im Anschluss an jede Vorlesung eine kurze Stellungnahme zu vier Aspekten per E-Mail zukommen zu lassen:

1. Das war neu für mich.
2. Das fand ich interessant, richtig oder gut.
3. Das fand ich langweilig oder uninteressant; darüber habe ich mich geärgert.
4. Das habe ich nicht verstanden.

Zu jeder einzelnen Vorlesung wurde den Studierenden zugleich ein Begleittext zum Herunterladen in die Studienplattform gestellt. So konnten auch solche Studierende, die eine Vorlesung versäumt hatten, zu den Inhalten der Vorlesung Stellung nehmen. Ich erhielt auf diese Weise zu jeder der 15 Vorlesungen über 80 einzelne Rückmeldungen, die zum Teil sehr differenziert ausgefallen sind. Aufgrund der Rückmeldungen der Studierenden wurden die Begleittexte noch einmal überarbeitet und flossen dann in die vorliegende Schrift mit ein. Durchweg entsprachen die Rückmeldungen meinen intendierten Zielsetzungen. Daher bin ich recht zuversichtlich, dass auch diese Schrift Ideen vermittelt, wie man allen Menschen helfen kann, von Anfang an einen tragfähigen Zugang zur Mathematik zu finden.

Vielen Studierenden sowie Kolleginnen und Kollegen, mit denen ich in Lehre und Forschung zusammenarbeiten durfte, bin ich für wichtige Anregungen und Kritik dankbar. Ebenso danke ich Herrn Silvio Wagner, der die Erstellung des Manuskripts aufmerksam verfolgt und mit hilfreichen Kommentaren und Vorschlägen unterstützt hat. Die meisten und wichtigsten Impulse verdanke ich jedoch den fast täglichen intensiven Arbeitskontakten mit Brigitte Ramisch-Kornmann, M. A., der ich diese Schrift widme.

Neckargemünd, zum Jahreswechsel 2009/10

*Reimer Kornmann*

## 0 Einleitender Überblick

Thematischer Schwerpunkt der vorliegenden Schrift sind Bemühungen, aufgetretenen oder zu erwartenden Problemen mit den Anforderungen des Mathematikunterrichts in der Primarstufe von Grund- und Sonderschulen so früh und so wirksam wie möglich zu begegnen. Dabei bleibt die Frage außer Betracht, ob diese Probleme im Sinne der gängigen Klassifikationssysteme als „Rechenschwäche“, „Rechenstörung“ oder „Dyskalkulie“ bezeichnet werden können oder nicht, ob also die schulischen Probleme allein auf den Mathematikunterricht beschränkt bleiben, oder ob sie sich auch bei anderen inhaltlichen Anforderungen zeigen.<sup>1</sup> Ebenso soll die Frage unberücksichtigt bleiben, ob die betroffenen Kinder in Sonderschulen oder – etwa im Rahmen integrativer oder inklusiver Konzepte – in Grundschulen unterrichtet werden. Gleichwohl ist die Darstellung an dem pädagogischen Gedanken der Inklusion orientiert. Dabei soll aber auf diesen Begriff nicht näher eingegangen werden, vielmehr sollen die Ausführungen dazu anregen, sich wichtige Voraussetzungen für die Gestaltung eines erfolgreichen Unterrichts mit mathematischen Inhalten – gerade auch für Kinder mit ungünstigen Lernvoraussetzungen und eingeschränkten Lernmöglichkeiten – zu verschaffen. Auf diese Weise kann sicherlich auch ein angemessenes Verständnis für die Prinzipien inklusiver Pädagogik vermittelt werden. Wegen seiner besonderen Bedeutung für den weiteren Schulerfolg soll dabei ein besonderes Gewicht auf die frühen vorschulischen Erfahrungen mit Mathematik und auf den Anfangsunterricht gelegt werden.

Was bedeutet in diesem Zusammenhang „erfolgreiche Unterrichtsgestaltung“? Zu diesem sehr komplexen Begriff tragen mindestens sechs verschiedene Komponenten bei, die grundsätzlich für jeden Unterricht gelten. Nachfolgend werden diese aber direkt auf den Mathematikunterricht bezogen.

---

<sup>1</sup> Nach dem Kriterienkatalog ICD 10 (10. Revision der International Classification of Diseases and Related Health Problems) der Weltgesundheitsorganisation WHO (2005) liegt eine Rechenstörung (Dyskalkulie) nur dann vor, wenn die Rechenleistungen des Kindes unterhalb des Niveaus liegen, das man aufgrund seines Alters und seiner allgemeinen Intelligenz erwarten kann, wobei die Lese- und Rechtschreibfähigkeiten zugleich im Normalbereich liegen müssen – ähnlich auch die Definition der vierten Revision des Diagnostischen und Statistischen Manuals psychischer Störungen DSM-IV-TR von Saß, Wittchen, Zaudig & Houben (2003). Wie verschiedene Analysen zeigen, ist eine solche Diskrepanzdefinition der Dyskalkulie pädagogisch nicht von Belang: Die Probleme und die pädagogischen Hilfen sind die gleichen, unabhängig davon, ob die Schwierigkeiten mit den Anforderungen des Mathematikunterrichts isoliert auftreten oder nicht (Moser Opitz, 2007).

1. Den Kindern wird ein emotional unbelasteter, nach Möglichkeit sogar ein von Interesse und Lernfreude geprägter Zugang zu den mathematischen Inhalten geschaffen. Dieser positive Zugang wird laufend gefestigt, erweitert und vertieft. Vermieden werden dabei Situationen, in denen sich Kinder diskriminiert, beschämt, enttäuscht, überfordert oder gelangweilt fühlen. Mit dem Mathematikunterricht sollen sie also keine negativen Erfahrungen verbinden.
2. Die mathematischen Inhalte werden so ausgewählt und dargeboten (oder aufbereitet), dass die Kinder deren Bedeutung für ihre reale Lebensgestaltung erfahren und ihre Beschäftigung mit Mathematik als sinnvoll erleben können.
3. Die mathematischen Inhalte sind in eine übergeordnete pädagogische Konzeption eingebettet, die darauf abzielt, die Denk- und Handlungsmöglichkeiten der Kinder in angemessener Weise zu erweitern.
4. Die Kinder sollen deutliche Lern- und Erkenntnisfortschritte bezüglich ihrer mathematischen Kompetenzen erzielen und diese Fortschritte als selbst verursachte Erfolge erfahren und erleben können.
5. Die Lernfortschritte der Kinder sind an deren je aktuellen individuellen Möglichkeiten (und nicht an vorgegebenen Lehr-Lern-Zielen des Lehrplans für Mathematik) zu messen: Kinder mit günstigen Lernvoraussetzungen dürfen und sollen mehr lernen als es der Lehrplan vorsieht, und Kindern mit ungünstigen Voraussetzungen wird man zufriedenstellende Lernergebnisse bescheinigen, wenn diese ihrem aktuellen Lernpotenzial entsprechen, selbst wenn die gezeigten Leistungen hinter den Zielen des Lehrplans zurückbleiben.
6. Lern- und Leistungsunterschiede der Kinder werden pädagogisch genutzt für ein gemeinsames Voranschreiten der gesamten Lerngruppe im Sinne der oben aufgeführten Aspekte: Den Kindern wird Raum gegeben, voneinander und miteinander zu lernen, sich gegenseitig zu helfen, Hilfen anzunehmen – kurz: ihre mathematischen Kompetenzen in Kooperation miteinander zu entwickeln.

Lehrkräfte, die einen solchen „erfolgreichen Unterricht“ gestalten können, müssen über eine Reihe von wichtigen professionellen Qualifikationsmerkmalen verfügen.

1. Wer den Kindern Interesse und Freude an mathematischen Lerninhalten vermitteln will, sollte selbst ein unbelastetes Verhältnis zur Mathematik gewonnen haben und bereit und in der Lage sein, hieran auch die Kinder in angemessener Weise teilhaben zu lassen.
2. Bei der „ganz normalen“ Lebensgestaltung im Alltag, ebenso wie im Schulleben und im Klassenzimmer, begegnet den Menschen eine Fülle mathematischer Phänomene, die auch für die Kinder bedeutsam sind. Für Erwachsene sind diese Phänomene oft so selbstverständlich, dass sie kaum noch wahrge-

nommen werden und vielleicht sogar wieder neu entdeckt werden müssen. Daher ist es wichtig, dass Lehrkräfte eine Sensibilität für solche alltagsbezogenen mathematischen Inhalte entwickeln und dabei die Kinder in diesen Entdeckungs- und Erkenntnisprozess einbeziehen.

3. Die Lehrkräfte sollten ihrem pädagogischen Handeln einen ethisch reflektierten Sinn geben und ihre Vorstellungen von Bildung und Erziehung am Beispiel ihrer eigenen Unterrichtspraxis lebensnah veranschaulichen können.
4. Erforderlich ist ein mathematikdidaktisches und entwicklungstheoretisches Wissen darüber, wie die Kinder im Zuge ihrer frühkindlichen Entwicklung grundlegende (oder basale) mathematische Konzepte erwerben, wie diese Erwerbsprozesse unterstützt und wodurch sie behindert werden können, schließlich, wie solchen Behinderungen mit pädagogischen Mitteln begegnet werden kann. Dieses Wissen fördert eine erhöhte Sensibilität für Lernfortschritte, die einhergeht mit einem entsprechenden Repertoire an diagnostischen Methoden, um solche Lernfortschritte festzustellen.
5. Um den einzelnen Kindern angemessene Lernimpulse geben zu können, müssen die Lehrkräfte über einen soliden Fundus an praktikablen Methoden verfügen, und sie müssen ihre Anforderungen und Impulse flexibel auf den jeweils aktuellen Lernstand der einzelnen Kinder abstimmen können.
6. Viele Lehrkräfte, die einen Unterricht gestalten wollen, in welchem Lern- und Leistungsunterschiede der Kinder toleriert und genutzt werden sollen, müssen sich von eigenen biografischen Erfahrungen lösen, durch die ihnen das konkurrenzorientierte Lernen zu einer unhinterfragbaren Selbstverständlichkeit geworden ist. Dies erfordert zum einen eine innere Widerständigkeit des Denkens gegenüber den üblichen sozialen Vergleichen bei der Notengebung im Studium und im Schulalltag, zugleich aber auch die Fähigkeit und Bereitschaft, bestehende Freiräume zu erkennen, zu nutzen und zu erweitern.

Diese anzustrebenden Qualifikationsmerkmale bilden die wesentlichen Orientierungspunkte der weiteren Ausführungen. Es sind freilich ideale Ziele, die nie voll zu erreichen sind. Vielmehr müssen sie ein ganzes Berufsleben lang vor dem Hintergrund der sich weiterentwickelnden Professionalität und der wechselnden Rahmenbedingungen für den Unterricht ständig überprüft, reflektiert und neu bestimmt werden.

Die Darstellung ist in sieben Kapitel gegliedert. Das erste Kapitel dient einer grundlegenden Standortbestimmung, die das Verhältnis der (zukünftigen) Lehrpersonen zur Pädagogik ganz allgemein betrifft. Die dabei herausgearbeiteten allgemeinen Prinzipien werden in den drei nachfolgenden Kapiteln für den Aufgabenbereich des Mathematikunterrichts spezifiziert. Damit folgt das Gliederungsprinzip einer weitgehend verbreiteten und anerkannten Sichtweise, wonach bei der Planung und Durchführung von Unterricht drei Aspekte zu beachten sind:



- die Sachstruktur, also das Spezifische des jeweiligen Gegenstandsbereichs,
- die Aneignungsstruktur, also die Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler,
- die Vermittlungsstruktur, also Fragen der Methodik und Didaktik.

Alle drei Aspekte sind im Hinblick auf einen erfolgreichen Unterricht von den Lehrpersonen in gleicher Weise zu berücksichtigen. Sie betreffen verschiedene Aufgabenbereiche, die jeweils unter der Perspektive der pädagogischen Verantwortlichkeit zu sehen sind.

So wird im zweiten Kapitel versucht, die Sicht solcher Lehrpersonen einzunehmen, die ihren Schülerinnen und Schülern einen tragfähigen Zugang zur Mathematik vermitteln wollen und sollen. Dazu müssen sie sich zunächst selbst einiger grundlegender, sehr einfacher mathematischer Sachverhalte bewusst werden, weil diese die unverzichtbare Grundlage aller darauf aufbauenden Einsichten bilden. Ausgehend von subjektiven und kulturhistorischen Begriffsbestimmungen wird die Mathematik unter zwei Aspekten, einem fachlich-objektiven und einem emotional-subjektiven, beleuchtet: Dabei wird nun davon ausgegangen, dass nicht wenige der zukünftigen Lehrkräfte aufgrund ihrer eigenen schulischen Erfahrungen ein mehr oder weniger gestörtes Verhältnis zum Fachgebiet der Mathematik entwickelt haben.<sup>2</sup> Deshalb werden in diesem Zusammenhang auch Überlegungen angestellt und Anregungen gegeben, wie diese Situation nachhaltig geändert werden kann.

Das notwendige fachliche Wissen, verbunden mit positiven Einstellungen zum Fach, muss ergänzt werden durch Überlegungen und Kenntnisse, die das Verhältnis der Schülerinnen und Schüler zum Lerngegenstand der Mathematik betreffen. Hiermit befasst sich Kapitel drei. Sollen die Kinder angemessene Lern- und Entwicklungsimpulse erhalten, die sie weder überfordern noch unterfordern und die ihre Bedürfnisse und Interessen ansprechen, dann müssen ihre Lernvoraussetzungen und Lernmöglichkeiten in Bezug auf den Lerngegenstand der Mathematik realistisch eingeschätzt werden. Um die emotionalen und kognitiven Lernvoraussetzungen der Kinder, ihre Lernstile und Lernprozesse sowie die lernförderlichen und lernbehindernden Bedingungen im schulischen und außerschulischen Lebensumfeld zu erkennen, sind insbesondere entwicklungstheoretische und diagnostische Kompetenzen erforderlich. Ein besonderer Schwerpunkt dieses Kapitels ist daher der Frage gewidmet, wie frühe Auswirkungen von Lern- und Erfahrungsdefizite im mathematischen Bereich zu erkennen und zu erklären sind, und wie diese gemindert oder überwunden werden können.

---

<sup>2</sup> Auf diesen Tatbestand wurde ich in meinen Seminaren aufmerksam, in deren Rahmen die Studierenden autobiografische Essays über ihr Verhältnis zur Mathematik und zum Mathematikunterricht verfassten (Kornmann, 1996). Diese Aussagen decken sich mit den Ergebnissen der „mathematischen Autobiografien“, die Schütte (1994, S. 13-16) auszugsweise darstellt und analysiert.

Die pädagogische Haltung und das fachliche Wissen über Mathematik einerseits, die Kenntnisse und das Verständnis entwicklungstheoretischer und diagnostischer Konzepte andererseits, sind wichtige Voraussetzungen für die inhaltliche und methodische Gestaltung eines angemessenen Mathematikunterrichts. Mit diesem Aufgabenbereich befasst sich das vierte Kapitel. Vorgestellt werden solche didaktischen Konzepte, die einsichtiges, aktiv-entdeckendes Lernen fördern und die sich deutlich abheben von einer – vor allem in der Sonderpädagogik – lange Zeit vorherrschenden stark lenkenden und das Denken beschränkenden Unterrichtsmethodik. Gleichwohl wird es darauf ankommen, den Lernenden klare Strukturen vorzugeben, innerhalb derer sie ihr mathematisches Denken in kreativer Weise entfalten und üben können.

Im Hinblick auf die Planung des Anfangsunterrichts ist die pädagogische Situation der Kinder bei Schulanfang zu bedenken. Zum einen erfordern die Inhalte schulischen Lernens von den Kindern neue Lernformen, und zum anderen müssen die Lehrpersonen im Hinblick auf eine individualisierende Gestaltung des Unterrichts wissen, mit welchen Unterschieden bezüglich der individuellen Lernvoraussetzungen sie bei Schulanfängern zu rechnen haben. Diese beiden Themenkomplexe werden in Kapitel fünf angesprochen.

Im sechsten Kapitel werden die grundsätzlichen und eher theoretisch gehaltenen Ausführungen der vier ersten Kapitel aufgegriffen und anhand praktischer Beispiele für die Gestaltung des Anfangsunterrichts konkretisiert. Dazu dienen zunächst sachkundliche Themen, die für die Kinder bedeutsam sind und die es ihnen zugleich erleichtern, Grundelemente mathematischer Strukturen zu erkennen. Diesen ist ein weiterer Abschnitt gewidmet, in welchem der Erwerb grundlegender Kompetenzen wie das Zählen, Vergleichen, Zerlegen, Bündeln und Strukturieren von Mengen thematisiert wird – alles Tätigkeiten, deren Inhalte und Ergebnisse sich durch Zahlen und Operationszeichen symbolisch repräsentieren lassen und die die Grundrechenarten auf der praktischen Erfahrungsebene fundieren. Besonderes Augenmerk wird hierbei auf solche Anforderungen gelegt, mit denen manche Kinder Schwierigkeiten haben könnten. Hieran knüpfen dann die Hinweise auf spezielle Hilfen an. In einem weiteren Schritt folgen Anregungen, wie den Kindern die vier Grundrechenarten nahe gebracht werden können, wobei ebenfalls die häufigsten „Stolpersteine“ bei den entsprechenden Lernanforderungen sowie die darauf bezogenen Hilfen thematisiert werden. Das Kapitel schließt mit einem kurzen Abschnitt, der den Sinn und die psychologischen Grundlagen des Übens verständlich machen soll.

Das abschließende siebte Kapitel enthält Hinweise und Überlegungen für Lehrpersonen, die sich über solche Kinder Gedanken machen, deren geistige Entwicklung durch Erfahrungsdefizite und ungünstige Lernbedingungen deutlich und nachhaltig eingeschränkt ist.

Zwei inhaltliche Bereiche kommen in dieser Schrift sicherlich zu kurz: zum einen die Geometrie, zum anderen die Textaufgaben. Während Aspekte der Geometrie an verschiedenen Stellen quasi am Rande berücksichtigt werden, ist den Textaufgaben lediglich ein kurzer Abschnitt im Zusammenhang mit Additions- und Subtraktionsaufgaben gewidmet. Diese geringe Gewichtung spiegelt die Tatsache wider, dass Schwierigkeiten mit den Anforderungen des Mathematikunterrichts doch eher in den Bereichen wahrgenommen werden, die auch die Schwerpunkte dieser Schrift bilden.

# 1 Zum Aufgabenbereich der Pädagogik unter allgemeiner Perspektive: Konsequenzen für die Ausbildung und Weiterentwicklung pädagogischer Professionalität

Wesentliches Ziel dieser Schrift ist es, zukünftigen ebenso wie ausgebildeten Lehrerinnen und Lehrern tragfähige Zugänge zur Mathematik und zum Mathematikunterricht zu vermitteln, damit sie auf dieser Grundlage auch den Kindern helfen können, sich den Gegenstandsbereich der Mathematik zu erschließen. Dazu bedarf es zunächst eines allgemeinen pädagogischen Grundverständnisses, das auch die Mathematik einschließt.

Wer sich für einen pädagogischen Beruf entscheidet, hat dafür ganz sicherlich bestimmte persönliche Gründe. Solche Gründe sind mehr oder weniger eng mit der individuellen Lebensgeschichte verbunden und sie gehen in den je eigenen Lebensentwurf ein – mag dieser nun schon recht weit gediehen und sehr bewusst geplant sein oder sich in einem noch recht vagen Anfangsstadium befinden. Auch die Wahl der späteren Unterrichtsfächer hat bei der Entscheidung für einen pädagogischen Beruf eine mehr oder weniger große Bedeutung. Diese Zusammenhänge und die Bandbreite der verschiedenen Möglichkeiten sollen die beiden nachfolgend dargestellten fiktiven Beispiele veranschaulichen.

Uwe B. will vor allem deswegen Lehrer werden, weil er gern mit Kindern arbeitet. Er hat schon seit einigen Jahren regelmäßig Kindergruppen in einer Umweltorganisation geleitet und dabei erkannt, dass die pädagogische Arbeit seinen Fähigkeiten und Neigungen gut entspricht. Gäbe es diese Organisation an seinem Wohnort nicht, hätte er wahrscheinlich andere Möglichkeiten gefunden, Kinder pädagogisch zu betreuen. Die Wahl seiner späteren Unterrichtsfächer, Biologie und Mathematik, war für ihn von nachrangiger Bedeutung: Biologie aufgrund seiner Tätigkeit in der Umweltorganisation, Mathematik, weil er in der Schule mit diesem Fach nie Probleme hatte und weil dies die Einstellungschancen angeblich verbessere.

Lena S. will nicht unbedingt Lehrerin werden, sieht aber in diesem Beruf und vor allem im Studium gut realisierbare Möglichkeiten, ihre Lieblingsfächer in der Schule, Biologie und Mathematik, weiter zu betreiben. Von Freunden und Bekannten hat sie erfahren, dass die Anforderungen des Mathematikstudiums im Studiengang für das Lehramt an Gymnasien sehr anspruchsvoll seien und daher nur mit einem sehr hohen zeitlichen Aufwand erfolgreich bewältigt werden könn-

ten. Daher hat sie sich für ein Lehramt entschieden, das nur bis zur Sekundarstufe I führt.

Soll eine Berufstätigkeit dauerhaft als zufriedenstellend erlebt und als erfolgreich eingeschätzt werden sowie zur persönlichen Weiterentwicklung beitragen, dann müssen die jeweils subjektiven Gründe für die Berufswahl auch möglichst gut auf die objektiven Anforderungen des entsprechenden Berufsfeldes abgestimmt werden können. Die objektiven Anforderungen ergeben sich zum einen aus den Inhalten und Zielsetzungen, auf die der Beruf ausgerichtet ist, und zum anderen aus den Methoden, die zum Erreichen der Ziele eingesetzt werden und mit denen die berufliche Tätigkeit praktisch beschrieben werden kann. Dabei sollten die Inhalte, Ziele und Methoden überzeugend begründet werden können und sich in einer möglichst transparenten Form darstellen lassen. Nur so sind jederzeit kritische Überprüfungen und gegebenenfalls Revisionen der Inhalte und Ziele und Verbesserungen der Methoden möglich. Solche laufenden Korrekturen von Inhalten, Zielen und Methoden der Berufstätigkeit ermöglichen Weiterentwicklungen der berufsbezogenen Kompetenzen. Diese müssen dem jeweils aktuellen Stand fachlicher Erkenntnisse entsprechen und sich im Rahmen von Ausbildungs- und Weiterbildungskonzepten als Qualifikationen vermitteln bzw. erwerben lassen. Werden Berufe im Sinne dieser Kriterien oder professionellen Standards ausgeübt, spricht man auch von Professionalität.

Für die Entwicklung pädagogischer Professionalität sind grundlegende theoretische Orientierungen hilfreich, damit zu wichtigen Fragen und Problembereichen klare Positionen eingenommen werden können. Solche pädagogischen Leitvorstellungen sollten für alle pädagogischen Aufgaben und Tätigkeitsbereiche gelten und so umfassend formuliert sein, dass sich hierauf die Inhalte, Ziele und Methoden des pädagogischen Handelns beziehen lassen. Weiterhin sollten die entsprechenden Aussagen eine möglichst breite Akzeptanz finden und zugleich einen hohen Grad an Verbindlichkeit besitzen.

Eine erste grundlegende Aussage betrifft den Aufgabenbereich der Pädagogik. Sicherlich kann man breiten Konsens dahin gehend finden, dass Pädagogik dazu dient, menschliche Entwicklung zu unterstützen. Der Begriff menschliche Entwicklung ist aber sehr komplex, so dass er zunächst noch aufgefächert werden sollte. Vier unterschiedliche inhaltliche Aspekte, unter denen menschliche Entwicklung betrachtet werden kann, sollen hier berücksichtigt und aufeinander bezogen werden:

1. der biologisch-anthropologische oder gattungsspezifische Aspekt: menschliche Entwicklung als Spezifikum der Gattung Mensch (im Unterschied zu Entwicklungen von Tieren und Pflanzen),
2. der phylogenetische oder gattungsgeschichtliche Aspekt: menschliche Entwicklung bezogen auf die gesamte Menschheit und die menschliche Gesellschaft,