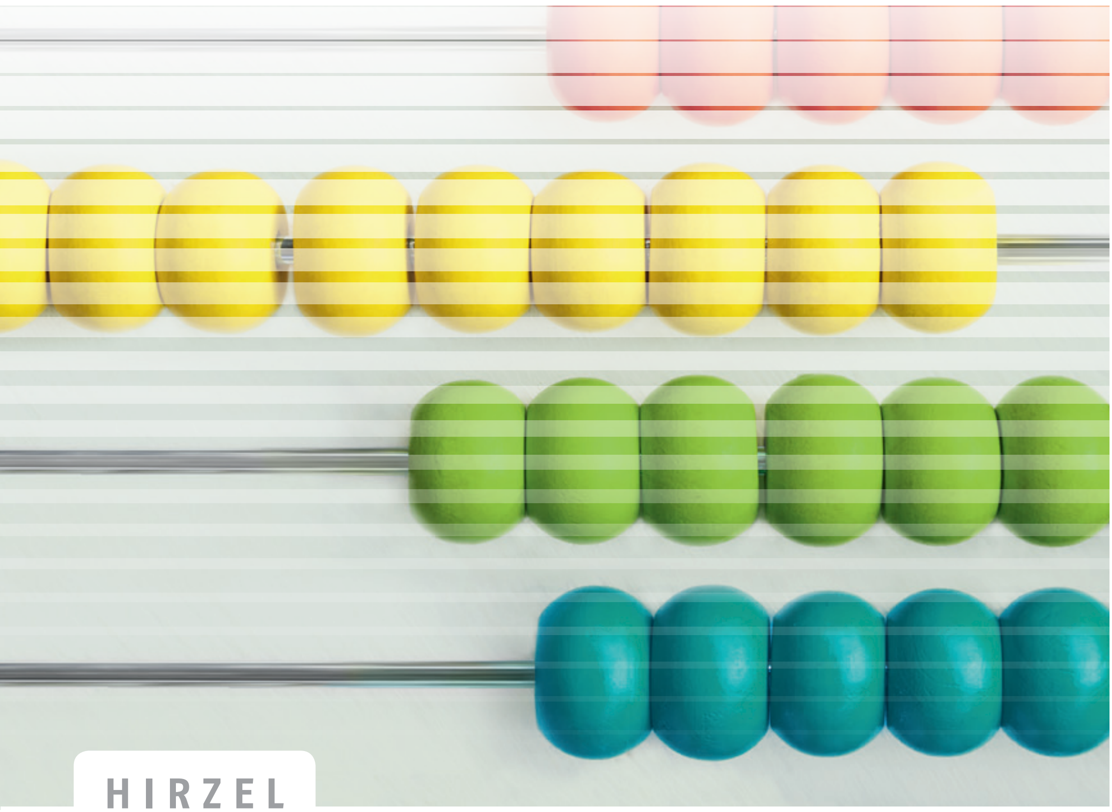
Yára Detert

MATHEMATIK

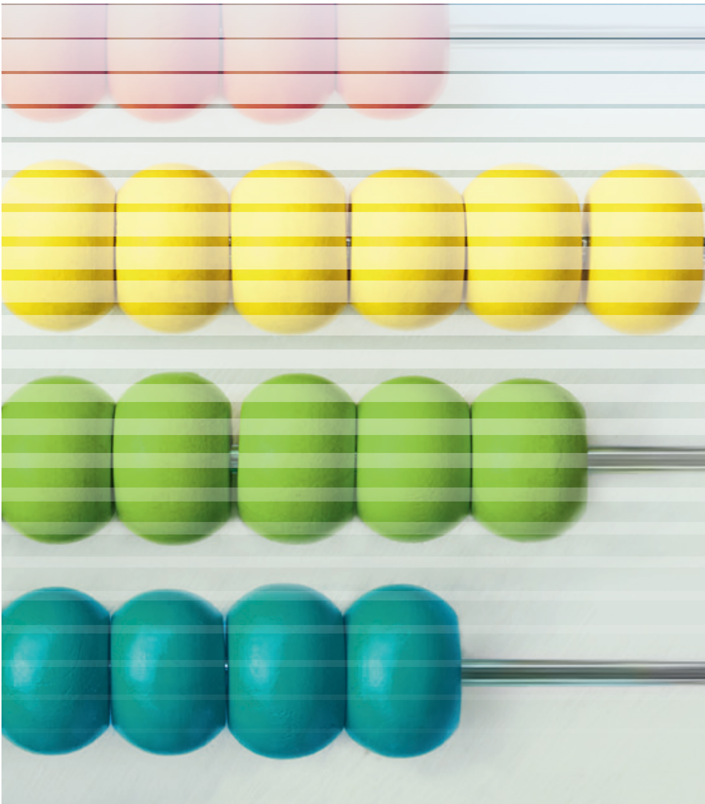
FÜR AHNUNGSLOSE

3. AUFLAGE



HIRZEL

Yára Detert studierte Bauingenieurwesen an der Technischen Universität Hannover. Im Anschluss arbeitete sie einige Jahre als Diplom-Ingenieurin.
Sie betreibt eine eigene Nachhilfeschule – Die Quadratwurzel – mit dem Schwerpunkt Naturwissenschaften.



Yára Detert

Mathematatik für Ahnungslose

FÜR AHNUNGSLOSE

In dieser Reihe sind bisher erschienen:

Yára Detert, **Mathematik** für Ahnungslose
Yára Detert / Christa Söhl, **Statistik** und Wahrscheinlichkeitsrechnung für Ahnungslose
Werner Junker, **Physik** für Ahnungslose
Michael Haugk / Lothar Fritsche, **Quantenmechanik** für Ahnungslose
Katherina Standhartinger, **Chemie** für Ahnungslose
Katherina Standhartinger, **Organische Chemie** für Ahnungslose
Antje Galuschka, **Biochemie** für Ahnungslose
Christa Söhl, **Biologie** für Ahnungslose
Michaela Aubele, **Genetik** für Ahnungslose
Heinz-E. Klockhaus, **Buchführung** für Ahnungslose
Heinz-E. Klockhaus, **BWL** für Ahnungslose

Yára Detert

MATHEMATIK

für Ahnungslose

Eine Einstiegshilfe für Studierende

3. Auflage

von Dipl.-Ing. Yára Detert, Auetal

Mit 131 Abbildungen und 7 Tabellen

S. Hirzel Verlag

Yára Detert
Grenzweg 25
31749 Auetal
yaradetert@die-quadratwurzel.de

Yára Detert, geb. 1962 in Bückeburg, studierte Bauingenieurwesen an der Technischen Universität Hannover. Im Anschluss arbeitete sie einige Jahre als Diplom-Ingenieurin. Bereits in dieser Zeit unterrichtete sie an einer Nachhilfeschule Mathematik und Physik. Da sie viel Freude an der Arbeit mit Kindern und Jugendlichen hat, entschloss sie sich, eine eigene Nachhilfeschule zu eröffnen. Diese Schule – Die Quadratwurzel – hat ihren Sitz in Rodenberg am Deister. Der ursprüngliche Schwerpunkt der „Quadratwurzel" lag bei den Naturwissenschaften. Mittlerweile werden auch Sprachen durch Fachkräfte unterrichtet.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über https://portal.dnb.de abrufbar.

ISBN: 978-3-7776-2671-0
3., korrigierte Auflage 2017

Birkenwaldstraße 44, 70191 Stuttgart
www.hirzel.de

Printed in Germany

Satz: Claudia Wild, Stuttgart
Umschlaggestaltung: deblik, Berlin
Umschlagabbildung: kan2d/shutterstock
Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck

Vorwort

Mathematik: eine Welt für sich – so wird schon mancher gedacht haben. In der Schule ist es wohl das Fach, über das am meisten gestöhnt wird. Dennoch kann man Spaß haben an der Welt der Zahlen und Symbole. Mir ging es während meiner Schul- und Studienzeit jedenfalls meistens so. Aber es gab auch immer wieder Phasen, in denen ich mich fragte, ob dieser Lehrer, der mir mathematisches Wissen beibringen wollte, wohl selbst begriffen hatte, was er da erzählte oder ob er es nur nicht vermitteln konnte. Bei manchem Lehrer hatte man auch den Eindruck, dass er den Elfenbeinturm der Wissenschaft nie verlassen hatte und deshalb nicht wusste, wie er Schülerhirne ansprechen sollte. Das ein oder andere Mal mag auch mangelnde Aufmerksamkeit dazu geführt haben, dass mir die Thematik etwas verborgen blieb. Da ich mich zumindest im Fach Mathematik immer bemüht habe, den Anschluss wieder zu finden, versuchte ich mir nicht Verstandenes aus Büchern zu erarbeiten, was nicht immer ganz einfach war. Noch schwieriger wurde es, als ich zu Beginn meines Ingenieurstudiums Bereiche der Mathematik betreten musste, die in der Schule nicht vermittelt werden. Der Gang in die Bibliothek war oft frustrierend, da die ausgeliehenen Bücher mir den Stoff nicht näher bringen konnten. Das eine unter den vielen Büchern zu finden, das Mathematik anschaulich und an Beispielen erklärte, wurde zur Suche nach der Nadel im Heuhaufen.
Diese Suche und die Erfahrungen, die ich in den letzten Jahren als Lehrkraft in Nachhilfe-Instituten und mittlerweile auch in meiner eigenen Nachhilfeschule, der „Quadratwurzel“, gemacht habe, veranlassten mich dazu, dieses Buch zu schreiben. Es soll Oberstufenschülern die Grundlagen der Mathematik vermitteln und ihnen die Möglichkeit geben, Versäumtes und in Vergessenheit Geratenes nachzuarbeiten, indem sie sich mit den Rechenbeispielen beschäftigen und die Rechenwege nachvollziehen. Auch für Studienanfänger findet sich hier der Einstieg in die Mathematik der ersten Semester. Somit deckt „Mathematik für Ahnungslose“ die Oberstufenmathematik und die ersten Ansätze für das Studium mit Mathematik als Nebenfach ab. Kein Platz blieb für die Stochastik, hierzu sei auf das Buch „Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung für Ahnungslose“, ebenfalls erschienen im Hirzel-Verlag, verwiesen. Ich wünsche allen, die mit diesem Buch arbeiten, dass sie ein wenig Freude mit der Welt der Zahlen, Symbole, Gleichungen und Funktionen haben werden und dass sie die Mathematik nicht nur als lästige Pflicht empfinden mögen.
Mein Dank geht an den Hirzel-Verlag, Stuttgart, und insbesondere an Herrn Dr. Muth für die freundliche redaktionelle Unterstützung dieses Buches.

Yára Detert
Rolfshagen, im Herbst 2017

Inhaltsverzeichnis

Vorwort . . . V
Verzeichnis mathematischer Symbole . . . X

1 Grundlagen . . . 1
1.1 Maßeinheiten und ihre Umwandlungen . . . 1
1.2 Bruchzahlen . . . 2
1.3 Dreisatzrechnung . . . 3
1.4 Binomische Formeln . . . 5
1.5 Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck (Pythagoras) . . . 6
1.5.1 Der Satz des Pythagoras . . . 6
1.5.2 Der Kathetensatz . . . 8
1.5.3 Der Höhensatz . . . 9
1.6 Trigonometrie . . . 10
1.6.1 Sinus, Kosinus, Tangens für den Bereich $0° \leq \alpha \leq 360°$ . . . 10
1.6.2 Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck . . . 11
1.6.3 Berechnungen an beliebigen Dreiecken . . . 14
1.7 Flächenberechnung an Vielecken . . . 19
1.7.1 Quadrat (a || c; b || d; a $\perp$ b) . . . 19
1.7.2 Rechteck (a || c; b || d; a $\perp$ b) . . . 19
1.7.3 Parallelogramm (a || c; b || d) . . . 20
1.7.4 Allgemeines Viereck . . . 20
1.7.5 Trapez (a || c) . . . 20
1.7.6 Dreiecke . . . 21
1.7.7 Kreis (r – Radius) . . . 22
1.7.8 Regelmäßiges n-Eck . . . 23
1.8 Berechnungen an Körpern . . . 23
1.8.1 Würfel . . . 23
1.8.2 Quader . . . 24
1.8.3 Prisma . . . 24
1.8.4 Kreiszylinder . . . 24
1.8.5 Pyramide . . . 25
1.8.6 Pyramidenstumpf . . . 26
1.8.7 Kegel . . . 26
1.8.8 Kegelstumpf . . . 27
1.8.9 Kugel . . . 27
1.8.10 Regelmäßige Polyeder . . . 27
1.9 Potenzen/Wurzeln . . . 29
1.9.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten . . . 29
1.9.2 Potenzen mit rationalen Exponenten . . . 29
1.10 Logarithmen . . . 30

2 Analysis 32
2.1 Funktionen 32
2.1.1 Definition von Funktionen 32
2.1.2 Lineare Funktionen 32
2.1.3 Quadratische Funktionen 37
2.1.4 Potenzfunktionen – Funktionen höherer Ordnung 42
2.1.5 Exponential- und Logarithmusfunktionen 52
2.2 Differenzialrechnung 54
2.2.1 Grenzwerte 54
2.2.2 Stetigkeit 58
2.2.3 Differenzierbarkeit und Ableitung 61
2.3 Bausteine einer Kurvendiskussion 66
2.3.1 Definitionsbereich/Wertebereich einer Funktion – Definitionslücken 66
2.3.2 Symmetrieeigenschaften einer Funktion 68
2.3.3 Asymptoten – Näherungskurven 69
2.3.4 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen 71
2.3.5 Ableitungen 73
2.3.6 Monotonie 76
2.3.7 Extrempunkte 77
2.3.8 Wendepunkte 80
2.3.9 Koeffizientenbestimmung 83
2.4 Kurvendiskussion 87
2.4.1 Ganzrationale Funktionen 87
2.4.2 Gebrochenrationale Funktionen 93
2.4.3 Exponentialfunktionen 98
2.4.4 Trigonometrische Funktionen 102
2.4.5 Bestimmung von Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften (Koeffizientenbestimmung) 104
2.5 Extremwertprobleme 107
2.5.1 Grundlagen 107
2.5.2 Extremwertprobleme I 108
2.5.3 Extremwertprobleme II 109
2.6 Differenzialgleichungen 113
2.6.1 Lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung 113
2.6.2 Lineare Differenzialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten 116
2.7 Integralrechnung 120
2.7.1 Flächeninhaltsfunktion 120
2.7.2 Stammfunktion 122
2.7.3 Integralfunktion – Flächenberechnung 125
2.7.4 Flächeninhalt zwischen zwei Kurven 130
2.7.5 Partielle Integration – Produktintegration 135
2.7.6 Integration durch Substitution 137
2.7.7 Uneigentliche Integrale 138
2.7.8 Volumen eines Drehkörpers 139

2.8 Komplexe Zahlen . . . 141
2.8.1 Die Zahlenebene . . . 141
2.8.2 Betrag, Abstand, Einheitskreis . . . 146
2.8.3 Konjugierte komplexe Zahl . . . 147
2.8.4 Multiplikation und Division komplexer Zahlen, Potenzen . . . 148

3 Lineare Algebra/Analytische Geometrie . . . 151
3.1 Vektoren . . . 151
3.1.1 Vektoren im Raum . . . 151
3.1.2 Addition und Subtraktion von Vektoren . . . 152
3.1.3 Vervielfachen von Vektoren . . . 153
3.1.4 Mittelpunkt einer Strecke . . . 154
3.1.5 Lineare Abhängigkeit von Vektoren . . . 155
3.1.6 Betrag eines Vektors . . . 157
3.2 Skalarprodukt von Vektoren . . . 157
3.2.1 Das Skalarprodukt . . . 157
3.2.2 Rechenregeln für das Skalarprodukt . . . 158
3.2.3 Winkel zwischen zwei Vektoren . . . 159
3.2.4 Orthogonale und parallele Vektoren . . . 160
3.3 Lineare Gleichungssysteme . . . 161
3.3.1 Lineare Gleichungssysteme mit 2 Variablen . . . 161
3.3.2 Gleichungssysteme mit drei und mehr Variablen – Gauß-Algorithmus . . . 167
3.3.3 Matrizen . . . 171
3.3.4 Determinanten . . . 175
3.3.5 Lösen von linearen Gleichungssystemen mithilfe von Determinanten – Cramer'sche Regel . . . 178
3.4 Analytische Geometrie mit Geraden . . . 180
3.4.1 Verschiedene Typen von Geradengleichungen . . . 180
3.4.2 Lagebeziehungen von Punkten und Geraden . . . 183
3.4.3 Abstand eines Punktes von einer Geraden . . . 185
3.4.4 Lagebeziehungen von Geraden . . . 186
3.4.5 Abstand windschiefer Geraden zueinander . . . 190
3.5 Analytische Geometrie mit Ebenen . . . 193
3.5.1 Verschiedene Typen von Ebenengleichungen . . . 193
3.5.2 Abstand eines Punktes von einer Ebene . . . 204
3.5.3 Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen . . . 205
3.5.4 Lagebeziehungen von zwei Ebenen . . . 208
3.6 Analytische Geometrie mit Kreisen und Kugeln . . . 212
3.6.1 Gleichungen von Kreisen und Kugeln . . . 212
3.6.2 Lagebeziehungen von Geraden und Kreisen . . . 215
3.6.3 Schnittpunkte zweier Kreise . . . 217
3.6.4 Lagebeziehungen von Geraden und Kugeln . . . 219
3.6.5 Lagebeziehungen von Ebenen und Kugeln . . . 221

Stichwortverzeichnis . . . 225

Verzeichnis mathematischer Symbole

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}+$	Menge der positiven reellen Zahlen

Intervalle

$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \,|a \leq x \leq b\}$
$]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \,|a < x < b\}$
$[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \,|a \leq x < b\}$
$]a; b] = \{x \in \mathbb{R} \,|a < x \leq b\}$

Geometrie

$P(a, b)$	Punkt mit den Koordinaten *a* und *b*
PQ	Strecke mit den Endpunkten *P* und *Q*
$\overline{PQ}$	Länge der Strecke *PQ*
$g \parallel h$	*g* ist parallel zu *h*
$g \perp h$	*g* ist senkrecht zu *h*

Differenzial-/Integralrechnung

$f'(x)$	1. Ableitung der Funktion
$f''(x), f'''(x), f^{(n)}(x)$	2., 3., n-te Ableitungsfunktion
$F(x)$	Stammfunktion der Funktion *f*
$\int_a^b f(x)dx$	Integral der Funktion f über $[a; b]$

Griechisches Alphabet

α A	β B	γ Γ	δ Δ	ε E	ζ Z
Alpha	Beta	Gamma	Delta	Epsilon	Zeta
η H	ϑ Θ	ι I	κ K	λ Λ	μ M
Eta	Theta	Jota	Kappa	Lambda	My
ν N	ξ X	o O	π Π	ϱ P	σ Σ
Ny	Xi	Omikron	Pi	Rho	Sigma
τ T	υ Y	φ Φ	χ X	ψ Ψ	ω Ω
Tau	Ypsilon	Phi	Chi	Psi	Omega

1 Grundlagen

1.1 Maßeinheiten und ihre Umwandlungen

Längen

$$1\text{ km} \xrightarrow{:1000} 1\text{ m} \xrightarrow{:10} 1\text{ dm} \xrightarrow{:10} 1\text{ cm} \xrightarrow{:10} 1\text{ mm}$$

1 km	=	1000 m
1 m	=	10 dm
1 dm	=	10 cm
1 cm	=	10 mm

Flächeninhalte

$$1\text{ km}^2 \xrightarrow{:100} 1\text{ ha} \xrightarrow{:100} 1\text{ a} \xrightarrow{:100} 1\text{ m}^2 \xrightarrow{:100} 1\text{ dm}^2 \xrightarrow{:100} 1\text{ cm}^2 \xrightarrow{:100} 1\text{ mm}^2$$

1 km^2	=	100 ha	1 m^2	=	100 dm^2
1 ha	=	100 a	1 dm^2	=	100 cm^2
1 a	=	100 m^2	1 cm^2	=	100 mm^2

Die Umwandlungszahl ist 100.

Rauminhalte (Volumina)

$$1\text{ m}^3 \xrightarrow{:1000} 1\text{ dm}^3 \xrightarrow{:1000} 1\text{ cm}^3 \xrightarrow{:1000} 1\text{ mm}^3$$

1 m^3	=	1000 dm^3	1 cm^3	=	1 ml
1 dm^3	=	1000 cm^3	1 dm^3	=	1 l
1 cm^3	=	1000 mm^3	1 l	=	1000 ml

Die Umwandlungszahl ist 1000.

Gewichte (Massen)

$$1\text{ t} \xrightarrow{:1000} 1\text{ kg} \xrightarrow{:1000} 1\text{ g} \xrightarrow{:1000} 1\text{ mg}$$

1 t	=	1000 kg
1 kg	=	1000 g
1 g	=	1000 mg

Die Umwandlungszahl ist 1000.

Zeitspannen

1 d = 24 h; 1 h = 60 min; 1 min = 60 s
(d bedeutet Tag, h bedeutet Stunde)

1.2 Bruchzahlen

Gewöhnliche Brüche

Gewöhnliche Brüche sind z. B.: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{5}{8}$ usw.

Die Zahl über dem Bruchstrich heißt Zähler, die Zahl unter dem Bruchstrich ist der Nenner. Der Nenner des Bruches gibt an, in wie viele gleich große Teile das Ganze zerlegt wird. Der Zähler gibt an, wie viele solche Teile davon vorhanden sind.

Gemischte Schreibweise

$2\frac{3}{4}$ bedeutet $2+\frac{3}{4}$

Beispiele: $2\frac{3}{4} = 2+\frac{3}{4}=\frac{8}{4}+\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$

$$\frac{13}{5} = \frac{10}{5}+\frac{3}{5}=2+\frac{3}{5}=2\frac{3}{5}$$

Kürzen und Erweitern

Man kürzt einen Bruch, indem man den Zähler und den Nenner durch dieselbe natürliche Zahl dividiert.

Beispiel: $\frac{3}{27} = \frac{3:3}{27:3}=\frac{1}{9}$

Man erweitert einen Bruch, indem man den Zähler und den Nenner mit derselben natürlichen Zahl multipliziert.

Beispiel: $\frac{1}{9} = \frac{1\cdot 4}{9\cdot 4}=\frac{4}{36}$

Addieren und Subtrahieren von Brüchen

Man addiert (subtrahiert) gleichnamige (gleiche Nenner) Brüche, indem man die Zähler addiert (subtrahiert). Der Nenner bleibt unverändert. Ungleichnamige Brüche (unterschiedliche Nenner) müssen zuerst gleichnamig gemacht werden.

Beispiele: $\frac{5}{8}+\frac{2}{8}=\frac{7}{8}$ $\qquad$ $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{10}{12}-\frac{9}{12}=\frac{1}{12}$

Multiplizieren von Brüchen

Man multipliziert Brüche, indem man den Zähler mit dem Zähler und den Nenner mit dem Nenner multipliziert.

Beispiel: $\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$

Dividieren von Brüchen

Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrwert des Bruches multipliziert.

Beispiel: $\frac{3}{8}:\frac{2}{3}=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{16}$

1.3 Dreisatzrechnung

Bei der Dreisatzrechung muss zwischen proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen unterschieden werden.

Proportionale Zuordnungen

Für proportionale Zuordnungen gilt: Zum Doppelten (Dreifachen, etc.) einer Größe gehört das Doppelte (Dreifache etc.) der zugeordneten Größe.
Zur Hälfte (zum dritten Teil etc.) gehört die Hälfte (der dritte Teil, etc.) der zugeordneten Größe.

Beispiel: Für Spaghetti Bolognese für vier Personen benötigt man 480 g Spaghetti. Wie viel g Spaghetti benötigt man für 7 Personen?

	Personen	Spaghetti	
	4	480 g	
: 4			: 4
	1	120 g	
· 7			· 7
	7	840 g	

Ergebnis: Für 7 Personen benötigt man 840 g Spaghetti.

Noch einfacher ist dieser Rechenweg zu praktizieren:

4 Personen ⇔ 480 g Spaghetti
7 Personen ⇔ *x* g Spaghetti

$$x = \frac{7\ \mathit{Personen} \cdot 480\ \mathrm{g}}{4\ \mathit{Personen}}$$

$$x = 840\ \mathrm{g}$$

Antiproportionale Zuordnungen

Für antiproportionale Zuordnungen gilt: Zum Doppelten (Dreifachen, etc.) einer Größe gehört die Hälfte (der dritte Teil, etc.) der zugeordneten Größe
Zur Hälfte (zum dritten Teil, etc.) einer Größe gehört das Doppelte (das Dreifache, etc.) der zugeordneten Größe.

Beispiel: Für eine Studienfahrt erhält ein Kurs einen Fahrtkostenzuschuss. Wenn alle 30 Teilnehmer mitfahren, erhält jeder 15,– Euro. Es fahren aber nur 25 Teilnehmer mit. Wie hoch ist nun der Zuschuss für jeden Kursteilnehmer?

	Teilnehmer	Zuschuss	
	30	15,– €	
: 6			· 6
	5	90,– €	
· 5			: 5
	25	18,– €	

Antwort: Jeder Kursteilnehmer erhält einen Zuschuss von 18,– Euro.

Noch einfacher geht es mit diesem Rechenweg:

30 Teilnehmer ⇔ 15,– €

25 Teilnehmer ⇔ *x* €

$$x = \frac{30\ \mathit{Teilnehmer} \cdot 15{,}-\ €}{25\ \mathit{Teilnehmer}}$$

$$x = 18{,}-\ €$$

1.4 Binomische Formeln

Man multipliziert zwei Summen miteinander, indem man jeden Summanden der ersten Summe mit jedem Summanden der zweiten Summe multipliziert.

1. Binomische Formel:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Beispiele: (1) $(2x+7)^2 = (2x+7)\cdot(2x+7) = 4x^2 + 14x + 14x + 49$

$= 4x^2 + 28x + 49$

(2) $(3xy+5)^2 = (3xy+5)\cdot(3xy+5)$

$= 9x^2y^2 + 15xy + 15xy + 25 = 9x^2y^2 + 30xy + 25$

2. Binomische Formel:

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Beispiele: (1) $(5y-z)^2 = (5y-z)\cdot(5y-z) = 25y^2 - 5yz - 5yz + z^2$

$= 25y^2 - 10yz + z^2$

(2) $(8x-8y)^2 = (8x-8y)\cdot(8x-8y)$

$= 64x^2 - 64xy - 64xy + 64y^2$

$= 64x^2 - 128xy + 64y^2$

3. Binomische Formel:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Beispiele: (1) $(y+3x)\cdot(y-3x) = y^2 - 3xy + 3xy - 9x^2 = y^2 - 9x^2$

(2) $(4x+12)\cdot(4x-12) = 16x^2 - 48x + 48x - 144$

$= 16x^2 - 144$

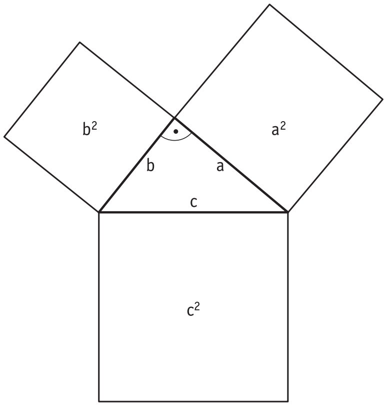
1.5 Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck (Pythagoras)

1.5.1 Der Satz des Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt der beiden Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates.

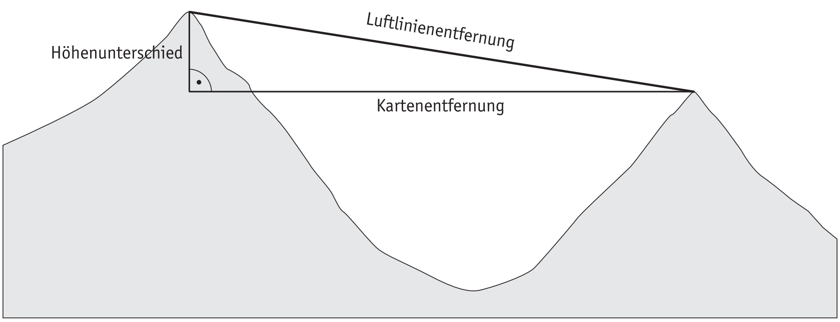
$a^2 + b^2 = c^2$

a: Länge der einen Kathete
b: Länge der anderen Kathete
c: Länge der Hypotenuse



Die beiden Katheten schließen den rechten Winkel ein, die Hypotenuse liegt diesem gegenüber.

Beispiel 1: Es soll die Luftlinienentfernung zwischen den Gipfeln des Großglockners (3797 m) und des Hahnlberges (2634 m) bestimmt werden. Aus der Landkarte kann eine Entfernung von 7,6 km abgelesen werden.



Rechnung: Der Höhenunterschied der beiden Gipfel beträgt 1163 m. Gemeinsam mit der Entfernung von 7600 m kann nun über den Pythagoras die Luftlinienentfernung bestimmt werden.

$(1163\ \text{m})^2 + (7600\ \text{m})^2 = x^2$

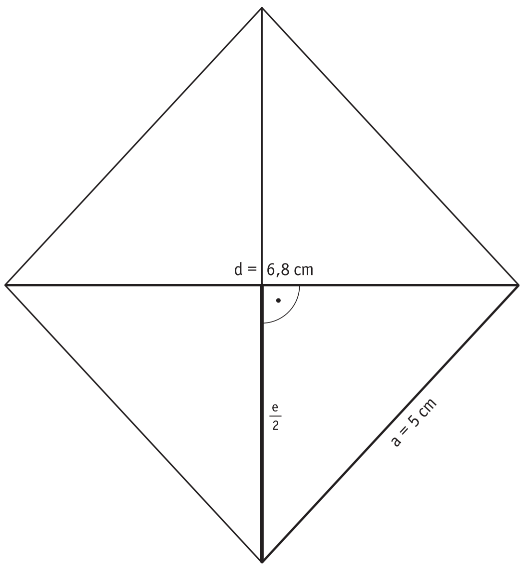
$1.352.569\ \text{m}^2 + 57.760.000\ \text{m}^2 = x^2$

$59.112.569\ \text{m}^2 = x^2 \qquad /\sqrt{\ }$

$7.688{,}47\ \text{m} = x$

Die Luftlinienentfernung der beiden Gipfel voneinander beträgt somit 7,68847 km.

Beispiel 2: In einer Raute mit einer Seitenlänge von 5 cm ist eine Diagonale 6,8 cm lang. Welchen Flächeninhalt hat die Raute?



Rechnung: Zuerst muss die Länge der anderen Diagonale bestimmt werden.

Gegeben: $a = 5\ \text{cm}$

$d = 6{,}8\ \text{cm}; \dfrac{d}{2} = 3{,}4\ \text{cm}$

$(3{,}4\ \text{cm})^2 + \left(\dfrac{e}{2}\right)^2 = (5\ \text{cm})^2$

$\left(\dfrac{e}{2}\right)^2 = (5\ \text{cm})^2 - (3{,}4\ \text{cm})^2$

$$\left(\frac{e}{2}\right)^2 = 13{,}44\ \text{cm}^2 \qquad /\sqrt{\ }$$

$$\frac{e}{2} = 3{,}67\ \text{cm} \qquad /\cdot 2$$

$$e = 7{,}34\ \text{cm}$$

Der Flächeninhalt der Raute ergibt sich nun aus dem Produkt der Länge der einen Diagonalen multipliziert mit der Hälfte der Länge der anderen Diagonalen.

$$A = d \cdot \frac{e}{2}$$

$$A = 6{,}8\ \text{cm} \cdot 3{,}67\ \text{cm} = 24{,}96\ \text{cm}^2$$

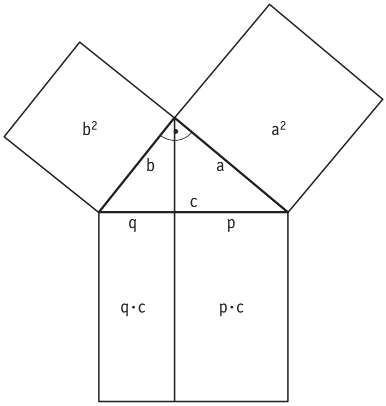
Die Raute hat einen Flächeninhalt von 24,96 cm^2.

1.5.2 Der Kathetensatz

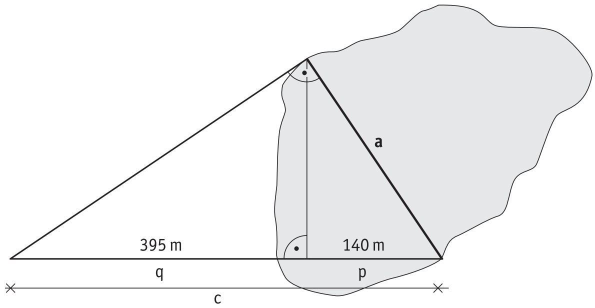
In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt eines Kathetenquadrates genauso groß wie der der Flächeninhalt des Rechteckes aus der Hypotenuse und dem zur Kathete gehörenden Hypotenusenabschnitt.

$$a^2 = p \cdot c$$
$$b^2 = q \cdot c$$

p, q: Länge der Hypotenusenabschnitte



Beispiel: Zu bestimmen ist die Entfernung von dem einen Seeufer zum anderen.



Rechnung: Gegeben: $c = p + q = 535\ \text{m}$
$p = 140\ \text{m}$

$a^2 = c \cdot p$

$a^2 = 535\ \text{m} \cdot 140\ \text{m}$

$a^2 = 74.900\ \text{m}^2 \qquad /\sqrt{\ }$

$a = 273{,}68\ \text{m}$

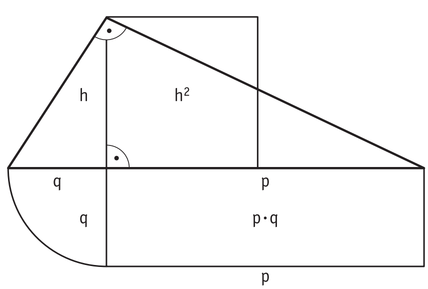
Die Entfernung der beiden Seeufer von einander beträgt 273,68 m.

1.5.3 Der Höhensatz

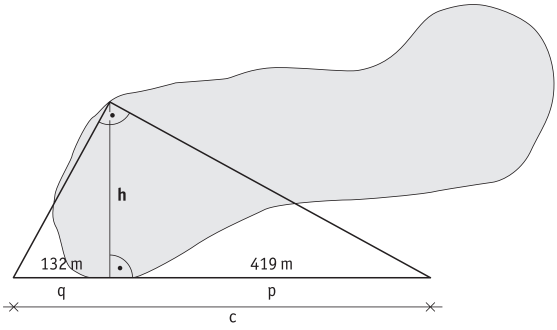
In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt des Quadrates über der Höhe gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks aus den beiden Hypotenusenabschnitten.

$h^2 = p \cdot q$

h: Dreieckshöhe



Beispiel: Es soll die Entfernung von einem Seeufer zum anderen bestimmt werden.



Rechnung: Gegeben: $p = 419$ m $\quad q = 132$ m $\quad c = p + q = 551$ m

$h^2 = p \cdot q$

$h^2 = 419 \text{ m} \cdot 132 \text{ m}$

$h^2 = 55.308 \text{ m}^2 \qquad /\sqrt{\ }$

$h = 235{,}18$ m

Die beiden Seeufer sind 235,18 m von einander entfernt.

1.6 Trigonometrie

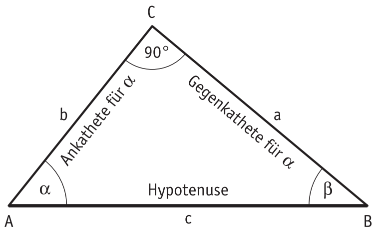
1.6.1 Sinus, Kosinus, Tangens für den Bereich 0° ≤ α ≤ 360°

Für spitze Winkel (im rechtwinkligen Dreieck) gilt:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Länge der Gegenkathete von } \alpha}{\text{Länge der Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Länge der Ankathete von } \alpha}{\text{Länge der Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Länge der Gegenkathete von } \alpha}{\text{Länge der Ankathete von } \alpha} = \frac{a}{b}$$



Für den Punkt P_α $(x; y)$ auf dem Einheitskreis gilt:

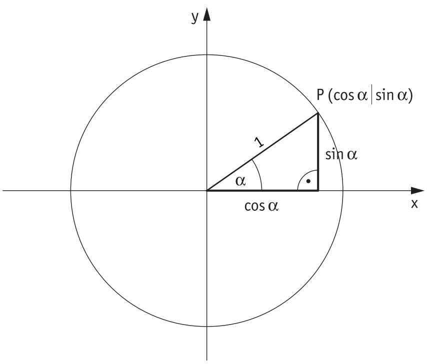
$\sin\alpha = y$; $\cos\alpha = x$

Für 0° $\leq$ α $\leq$ 180° gilt:	**Für 0° $\leq$ α $\leq$ 360° gilt:**
$\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$	$\sin\alpha = -\sin(360^\circ - \alpha)$
$\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$	$\cos\alpha = \cos(360^\circ - \alpha)$
$\tan\alpha = -\tan(180^\circ - \alpha)$	$\tan\alpha = -\tan(360^\circ - \alpha)$

Zusammenhänge zwischen Sinus, Kosinus und Tangens

$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

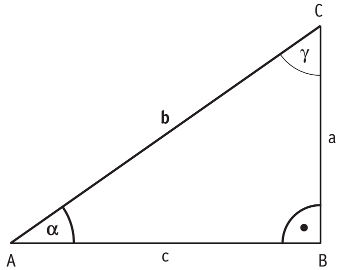


1.6.2 Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck

Aus zwei Seiten oder aus einer Seite und einem Winkel lassen sich die übrigen Seiten und Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks berechnen.
Weil man jedes beliebige Dreieck mithilfe von Höhen in rechtwinklige Dreiecke zerlegen oder zu solchen ergänzen kann, können damit auch nicht-rechtwinklige Dreiecke berechnet werden und somit auch n-Ecke, die wiederum aus Teildreiecken bestehen.

Beispiel 1: In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sind gegeben:
$b = 5\ \text{cm},\ \alpha = 35^\circ,\quad \beta = 90^\circ$

Gesucht sind die Größen a, c und γ.



Lösung:

Berechnung von *a*:
$$\frac{a}{b} = \sin\alpha \qquad / \cdot b$$
$$a = b \cdot \sin\alpha$$
$$a = 5\ \text{cm} \cdot \sin 35^\circ \approx 2{,}87\ \text{cm}$$

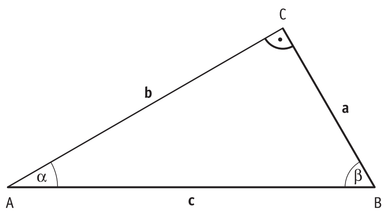
Berechnung von *c*:
$$\frac{c}{b} = \cos\alpha \qquad / \cdot b$$
$$c = b \cdot \cos\alpha$$
$$c = 5\ \text{cm} \cdot \cos 35^\circ \approx 4{,}10\ \text{cm}$$

Berechnung von γ:
$$\alpha + \gamma = 90^\circ$$
$$\gamma = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$$

Ergebnis: $a = 2{,}87\ \text{cm};\ \ c = 4{,}10\ \text{cm};\ \ \gamma = 55^\circ$

Beispiel 2: In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sind gegeben:
$a = 5\ \text{cm},\qquad c = 13\ \text{cm},\qquad \gamma = 90^\circ$

Gesucht sind die Größen b, α und γ.



Lösung:

Berechnung von *b*: $a^2 + b^2 = c^2$ (s. Kap. 1.5.1)

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

$b = \sqrt{13^2 - 5^2}\ \text{cm} = 12\ \text{cm}$

Berechnung von *α*: $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{5\ \text{cm}}{13\ \text{cm}} \approx 0{,}3846154;$

$\alpha \approx 22{,}62^\circ$

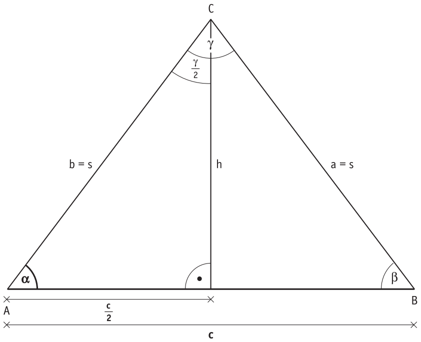
Berechnung von *β*: $\cos\beta = \dfrac{a}{c} = \dfrac{5\ \text{cm}}{13\ \text{cm}} \approx 0{,}3846154;$

$\beta \approx 67{,}38^\circ$

Ergebnis: $b = 12\ \text{cm};$ $\alpha = 22{,}62^\circ;$ $\beta = 67{,}38^\circ$

Beispiel 3: In einem gleichschenkligen Dreieck ist die Länge der Basis ($c = 58\ \text{m}$) und der Basiswinkel ($\alpha = 53^\circ$) gegeben.

Zu berechnen sind der Winkel γ an der Spitze, die Höhe h sowie die Länge s eines Schenkels.



Lösung:

Berechnung von *γ*: $2\alpha + \gamma = 180^\circ$ mit $\alpha = \beta$

$\gamma = 180^\circ - 2\alpha$ $\gamma = 180^\circ - 106^\circ = 74^\circ$