Frauke Ulfig

Geometrische Denkweisen beim Lösen von PISA-Aufgaben

Triangulation quantitativer und qualitativer Zugänge

RESEARCH

Springer Spektrum

Perspektiven der Mathematikdidaktik

Herausgegeben von
G. Kaiser, Hamburg, Deutschland
R. Borromeo Ferri, W. Blum, Kassel, Deutschland

In der Reihe werden Arbeiten zu aktuellen didaktischen Ansätzen zum Lehren und Lernen von Mathematik publiziert, die diese Felder empirisch untersuchen, qualitativ oder quantitativ orientiert. Die Publikationen sollen daher auch Antworten zu drängenden Fragen der Mathematikdidaktik und zu offenen Problemfeldern wie der Wirksamkeit der Lehrerausbildung oder der Implementierung von Innovationen im Mathematikunterricht anbieten. Damit leistet die Reihe einen Beitrag zur empirischen Fundierung der Mathematikdidaktik und zu sich daraus ergebenden Forschungsperspektiven.

Frauke Ulfig

Geometrische Denkweisen beim Lösen von PISA-Aufgaben

Triangulation quantitativer und qualitativer Zugänge

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Michael Neubrand

Springer Spektrum

RESEARCH

Frauke Ulfig
Eckernförde, Deutschland

Dissertation Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, 2011

ISBN 978-3-658-00587-0 ISBN 978-3-658-00588-7 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-00588-7

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Geleitwort

Für die Tests im Jahr 2003, also beim zweiten Zyklus der PISA-Studie, wurde erstmals Mathematik als die sog. „major domain" genommen. Auf der Basis des damals umfangreicheren Aufgabenbestands wurden zwei Charakteristika der mathematischen Leistungen in Deutschland identifiziert: Die Förderung der leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler schien das Kernproblem für die Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in Deutschland zu sein, und die deutlichsten inhaltlichen Defizite gab es in der Geometrie. Dennoch hat sich an den Schwerpunkten der mathematikdidaktischen Forschung seither nur wenig geändert. Nach wie vor finden wir die Mehrzahl der Arbeiten zum Mathematikunterricht im gymnasialen Bereich der Sekundarstufe-I, nicht etwa zum Mathematikunterricht an den Hauptschulen. Noch verstärkt gilt das für das Teilgebiet Geometrie. Somit reagiert die vorliegende Arbeit von Frauke Ulfig passgenau auf die mit PISA-2003 erkannten zentralen Probleme: Sie wählt Geometrie und blickt gezielt auf Schülerinnen und Schüler aus Hauptschulen.

Allein aus den Daten hergeleitete bildungspolitische oder mathematikdidaktische Desiderata definieren jedoch noch keinen Forschungsansatz und erst Recht keinen Entwicklungsansatz. Dazu bedarf es eben beider Seiten, der umfangreichen Daten als Evidenzbasis – diese liegen mit PISA vor – und der Einsicht in das individuelle und aufgabenbezogene geometrische Denken – und dazu muss ein geeignetes Untersuchungsdesign entworfen werden. Frauke Ulfig geht in vier Stufen vor: Auf das (videographierte) Lösen ausgewählter PISA-Aufgaben durch jeweils Paare von Hauptschülerinnen und -schülern folgt ein *Nachträgliches Lautes Denken*, das durch das Zeigen bestimmter Abschnitte des Videos gezielt unterstützt werden kann; sodann kommen zwei reflektierende Elemente, ein Interview (leitfadengestützt) und ein abermaliges, beobachtetes Lösen der Aufgaben. So gelingt es, Analysen von Lösungsprozessen von Aufgaben in angemessener Differenziertheit durchzuführen.

Die Grundbedingungen dafür sind wieder mit PISA verknüpft: Aufgrund der gerade von der deutschen PISA-Expertengruppe, der auch Frauke Ulfig seinerzeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin angehörte, sehr differenziert durchgeführten Aufgaben-Analyse und (soweit es die deutschen Zusatzaufgaben betrifft) Aufgaben-Konstruktion konnte man auf ein Aufgabenset zugreifen, das zentrale mathematische Denkweisen abbildet, insbesondere auf eine hinreichende Anzahl von Aufgaben, die nicht den in der Schule dominierenden Berechnungen, sondern der begrifflichen Vertiefung gewidmet waren. Zudem liefert bereits PISA keineswegs nur Prozentzahlen korrekter Lösungen; wir kennen von PISA auch die vollständigen konkreten Schülerlösungen samt Anmerkungen und Skizzen. Damit ist auch eine Einbettung der hier fallmäßig untersuchten Schülerlösungen in das Verhalten der Schülerinnen und Schüler insgesamt bei PISA möglich. Gerade die Durchsicht der im PISA-Test angefertigten Zeichnungen und Rechenansätze ist hier aussagekräftig, weil damit nicht nur authentische sondern auch repräsentative Dokumente vorliegen.

Frauke Ulfigs Untersuchung fokussiert auf die beiden gerade in der Hauptschule zentralen Begriffe Umfang und Flächeninhalt. Hinter diesen Begriffen steht nämlich nicht nur die praktische Anwendbarkeit, sondern sie zeigen auch exemplarisch auf, dass sich bei geometrischen Themen rechnerische und begriffliche Aspekte der Mathematik in charakteristischer Weise überschneiden. Die Auswahl dieser beiden Grundbegriffe macht die Arbeit zudem unmittelbar brauchbar für anschließende Überlegungen zur Weiterentwicklung des Geometrieunterrichts.

Dafür eignen sich die von Frauke Ulfig aus den Beobachtungen der Schülerinnen und Schüler herausdestillierten und schlagwortartig bezeichneten vier geometrischen Denkweisen, die es als Realität zu beachten gilt, die aber eben auch gezielt so zu überwinden sind, dass – nicht nur in der Hauptschule – geometrisches Denken in seinem Facettenreichtum und seinem „Vorbildcharakter für die Mathematik“ (Benno Artmann) stärker zum Zug kommt:

„Begriff ist Formel“: Aber eine Figur kann auch dann ein Objekt des geometrischen Denkens werden, wenn es dafür keine Formel gibt; und man kann es in der Schule an elementaren Beispielen illustrieren.

„Dominanz des Berechnens“: Aber erst die algebraische Struktur zeigt die geometrischen Eigenschaften auf, nicht das rein numerische Rechnen; und natürlich gewinnt dann umgekehrt auch die Algebra an inhaltlichen Beziehungen.

„Einschränkung auf Bekanntes“: Aber an Figuren könnte im Unterricht eine sehr viel größere Vielfalt vorkommen, als die wenigen, die einen Namen haben; und man sollte es im Mathematikunterricht dann auch wagen und realisieren.

„Messen statt Strukturieren“: Aber numerische Beziehungen können auch auf geometrische Zusammenhänge zurückgeführt werden und nicht nur auf Messergebnisse; und dies kann man im Mathematikunterricht vielfältig üben.

Es mag für manche Beobachter überraschend sein, dass large-scale-Untersuchungen wie PISA die fachdidaktische Entwicklungsarbeit beeinflussen können. Dieses Potential muss aber erst erschlossen werden, denn eine large-scale-Studie ist kein Entwicklungsprojekt. Die Arbeit von Frauke Ulfig ist wohl eine der ersten, die auf der Basis von PISA-Aufgaben und mit den PISA-Resultaten im Hintergrund den Schritt von empirischen großflächigen Studien zum individuellen Verhalten bei der Lösung konsequent umsetzt – und damit Entwicklungsperspektiven öffnet.

Oldenburg, im September 2012 Michael Neubrand

Dank

Allen Personen, die mich im Laufe meiner Forschungsarbeit und beim entstehen dieser Arbeit unterstützt haben, möchte ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen.

Zuerst danke ich den Schülerinnen und Schülern, die für mich Geometrieaufgaben bearbeitet haben und mir geduldig ihre Vorgehensweisen und Vorstellungen und vor allem auch ihre Schwierigkeiten und Fehler näher gebracht haben. Bei den Schulleiterinnen und Schulleitern sowie bei den Mathematiklehrkräften der ausgewählten Schulen bedanke ich mich dafür, dass sie mir bereitwillig Türen geöffnet haben. Ohne die Kooperation derer, die täglich Unterricht praktizieren, ist empirische Forschung nicht möglich.

Prof. Dr. Michael Neubrand, dem Betreuer meiner Dissertation, gilt mein besonderer Dank. Er holte mich nach Beendigung des Referendariats wieder an die Universität zurück, indem er mein Interesse an der PISA-Studie aufgriff und mir anbot, an der Konzeption und Auswertung der PISA-Studie 2003 in der Arbeitsgruppe Mathematik mitzuarbeiten. Prof. Dr. Michael Neubrands differenzierter Überblick über Zugänge, Tätigkeiten und Sichtweisen der (Schul-) Geometrie war für meine Orientierung in diesem weiten Feld äußerst hilfreich. Seine stoffdidaktischen Grundlagenanalysen und das diesen Sichtweisen zugrunde liegende Konzept hinter den nationalen Geometrieaufgaben der PISA-Studie sind für diese Arbeit von großem Wert.

Auch den weiteren Mitgliedern der PISA-Arbeitsgruppe Mathematik 2003 danke ich für anregende Diskussionen und inspirierende Analysen. Den zuständigen PISA-Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des IPN in Kiel und des IEA Data Processing and Research Center in Hamburg danke ich dafür, dass sie mir die benötigten PISA-Daten zur Verfügung stellten und auftretende technische Probleme lösten.

Den Doktorandinnen und Doktoranden des Studiengangs „ProDid – Didaktische Rekonstruktion“ der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, ihren Betreuerinnen und Betreuern und weiteren Referenten sei gedankt für Gespräche und Anregungen, vor allem aus der Perspektive der qualitativen Forschung. Bei Prof. Dr. Ulrich Kattmann, dem „Erfinder“ der „Didaktischen Rekonstruktion“, möchte ich mich für die frühe Wertschätzung und sein besonderes Interesse an meiner Forschungsarbeit bedanken. Das hat mich sehr motiviert und führte letztendlich dazu, dass Prof. Dr. Ulrich Kattmann Zweitgutachter dieser Arbeit wurde.

Teilnehmerinnen und Teilnehmer des Doktorandenkolloquiums der Universitäten in Bremen und Oldenburg hatten entscheidende Ideen für die Auswertung und die Darstellung der Ergebnisse, auch dafür vielen Dank. Ramona Jansing und Marco Jürgens sei gedankt für zwei gelungene Masterarbeiten, die das Thema meiner Dissertation aufgreifen und weiterführen.

Manuela Hillje, Stephanie Schlump, Ariane Springfeld, Anja Oberle, Kerstin Triphaus und Annegret Wittkuhn haben Teile der Arbeit gründlich Korrektur gelesen. Dafür gilt ihnen mein besonderer Dank. Technische Unterstützung zum Fertigstellen der Druckversion fand ich bei meiner Lektorin Britta Göhrisch-Radmacher und bei Sascha Ulfig.

Meinem Mann, Sascha Ulfig, sowie meiner Familie danke ich abschließend dafür, dass sie mich mehrere Jahre lang vielfältig und geduldig unterstützt haben und damit einen entscheidenden Beitrag zum Fertigstellen dieser Arbeit leisteten.

Frauke Ulfig

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Einleitung

Geometrische Denkweisen durchdringen die gesamte Mathematik, denn mathematisches Denken bedient sich oft geometrischer Stützen. Immer, wenn es darum geht, visuell dargebotene Informationen aufzunehmen, zu analysieren, zu speichern und mit ihnen in der Vorstellung zu operieren, sind dabei geometrische Denkweisen von grundlegender Bedeutung.

Vor diesem Hintergrund prägte Artmann (1979) in seiner Vorlesung über Elementargeometrie den programmatischen Titel „Geometrie als Vorbild für Mathematik". Er verdeutlicht, dass alle typischen mathematischen Arbeitsweisen in der Elementargeometrie einigermaßen unverfälscht und mit substantiellem Inhalt vorkommen und betont damit den eigentlichen Wert der Elementargeometrie als Schulfach. Freudenthal betont in diesem Zusammenhang den Nutzen der Geometrie für Entdeckungen zur Erschließung der Umwelt:

„Geometrie ist eine der großen Gelegenheiten, die Wirklichkeit mathematisieren zu lernen. Es ist eine Gelegenheit, Entdeckungen zu machen … Gewiss, man kann auch das Zahlenreich erforschen, man kann rechnend denken lernen, aber Entdeckungen, die man mit den Augen und Händen macht, sind überzeugender und überraschender. Die Figuren im Raum sind, bis man sie entbehren kann, ein unersetzliches Hilfsmittel, die Forschung und die Erfindung zu leiten." (*Freudenthal 1973, Bd. 2, 380)*

Interessante Erkenntnisse hinsichtlich der Bedeutung geometrischer Denkweisen für die Mathematikleistungen zeigen sich in den Ergebnissen von PISA, dem „Programme for International Student Assessment". Nach Expertenmeinung sind die PISA-Aufgaben zum Inhaltsbereich „Raum und Form", der dem Bereich Geometrie nahe steht, als besonders bedeutsam für einen zeitgemäßen Mathematikunterricht anzusehen (Blum u.a. 2005). Tatsächlich zeigen die insgesamt kompetenzstärksten Länder Bayern, Sachsen, Baden-Württemberg und Thüringen bei der Einordnung in das internationale Spektrum im Inhaltsbereich „Raum und Form" überdurchschnittliche Kompetenzwerte. Gute Geometrieleistungen gehen demnach mit einer insgesamt hohen mathematischen Kompetenz einher: „Es handelt sich tatsächlich um die Länder mit einer insgesamt hohen mathematischen Kompetenz, wenn dieser Schwerpunkt in der Geometrie eingelöst wird" (Blum u.a. 2005, 81). Diese Schlussfolgerung aus den PISA-Daten deutet darauf hin, dass im Bereich der Geometrie ein wichtiger Ansatz zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts liegt und ein Schlüssel zur Verbesserung der Mathematikleistungen insgesamt.

F. Ulfig, *Geometrische Denkweisen beim Lösen von PISA-Aufgaben,* Perspektiven der Mathematikdidaktik, DOI 10.1007/978-3-658-00588-7_1, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2013

Doch nicht erst die Ergebnisse von Vergleichsuntersuchungen wie TIMSS und PISA trugen zum Erkennen der Bedeutung der Geometrie bei, sondern bereits die seit den 70er Jahren vorgetragenen kontinuierlichen Argumentationslinien (Bauersfeld 1967 und Winter 1976) für eine Förderung geometrischen Denkens im Mathematikunterricht, die sich durch ihre Allgemeinheit und Grundsätzlichkeit auszeichnen. So gibt es heute eine Vielzahl neuer Forschungsthemen, -ansätze und -methoden und die Komplexität didaktischer Problemstellungen im Geometrieunterricht ist bewusst geworden (Graumann u.a. 1996, 177).

Ohne die im nächsten Kapitel beschriebenen Sichtweisen aus Kognitionspsychologie und Mathematikdidaktik zum geometrischen Denken und zur geometrischen Begriffsbildung vorweg nehmen zu wollen, seien an dieser Stelle einige der wichtigsten Leitgedanken aufgeführt, die das Fördern geometrischen Denkens im Mathematikunterricht begründen (vgl. Radatz und Rickmeyer 1991 sowie Bauersfeld 1993):

- „Geometrische Inhalte fördern grundlegende kognitive Kompetenzen,
- Geometrische Inhalte erlauben das Entwickeln spezifischer mathematischer Denkweisen,
- Geometrie trägt Unverzichtbares zur Umwelterschließung bei,
- Arithmetische Begriffe werden in engem Zusammenhang mit geometrischen Begriffen ausgebildet.“ (zitiert nach Neubrand 1994, 37)

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen der Mitarbeit an der Konzeption und Auswertung der PISA-Studie 2003. Eine viel beachtete und diskutierte Konsequenz aus PISA ist der besondere Förderbedarf von Schülerinnen und Schülern im unteren Leistungsbereich. Der Anteil der Schülerinnen und Schüler in der Risikogruppe ist mit über 22 Prozent in Deutschland nach wie vor höher als in den meisten anderen Ländern. Die Reduzierung des hohen Anteils von Risikoschülerinnen und -Schülern ist ein dringendes Anliegen. Obwohl dies bereits eine zentrale Schlussfolgerung aus PISA 2000 war, sind gerade in diesem Bereich bis jetzt kaum Veränderungen zu erkennen (Blum u.a. 2004, 90).

Unbestritten scheint es hinsichtlich einer Weiterentwicklung des Geometrieunterrichts äußerst wichtig zu sein, mehr über die Vorgehensweisen dieser Schülerinnen und Schüler beim Bearbeiten von Geometrieaufgaben der PISA-Studie zu erfahren. Die Fragen nach gewählten Lösungswegen, Schwierigkeiten und Fehlern und den dahinter stehenden geometrischen Denkweisen einzelner Schülerinnen und Schüler lassen sich jedoch allein anhand der vorliegenden PISA-Ergebnisse nicht ausreichend beantworten. PISA liefert globale Daten über Bildungssysteme und diese Ergebnisse darf man nicht ohne Weiteres auf einzelne Schülerinnen und Schüler beziehen. An dieser Stelle setzt die von mir durchgeführte, ergänzende qualitative Studie an. Als Probanden wurden Schülerinnen und Schüler ausgewählt, die eine Hauptschule besuchen, da die Hauptschülerinnen und Hauptschüler bei PISA den überwiegenden Teil von Risikoschülerinnen und –Schülern bilden.

Während bei PISA nur die Ergebnisse der Aufgaben betrachtet werden können, stehen in meiner qualitativen Erhebung die Lösungsprozesse und in diesem Zusammenhang die individuellen Vorstellungen und Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler im Vordergrund. Dabei werden quantitative und qualitative Analysen in wechselseitigem Nutzen miteinander verbunden. Einen Orientierungsrahmen liefert das Modell der Didaktischen Rekonstruktion als gemeinsames Forschungsparadigma des Promotionsprogramms ProDid der Universität Oldenburg. In diesem Modell geht es darum, theoretische Sichtweisen mit Lernerperspektiven so in Beziehung zu setzen, dass daraus ein Lerngegenstand entwickelt werden kann (Kattmann u.a. 1997, 3).

Für die vorliegende Arbeit wurden folgende Forschungsfragen formuliert:

- Welche geometrischen Denkweisen von Hauptschülerinnen und Hauptschülern führen zu Schwierigkeiten beim Bearbeiten der PISA-Aufgaben?
- Wie lassen sich diese geometrischen Denkweisen vor dem Hintergrund mathematikdidaktischer und kognitionspsychologischer Sichtweisen und des Grundbildungskonzepts von PISA beschreiben und strukturieren?

In der durchgeführten qualitativen Studie bearbeiteten Hauptschülerinnen und Hauptschüler vier ausgewählte Geometrieaufgaben der PISA-Studie, die auf die Begriffe Flächeninhalt und Umfang zielen. Um eine möglichst hohe Datendichte mit unterschiedlichen Reflexionsebenen zu erreichen, wählte ich hierzu ein mehrphasiges Design, das unterschiedliche Erhebungsphasen verbindet.

Für die ergänzende qualitative Erhebung wurden vor diesem Hintergrund Untersuchungsfragen formuliert, die zur Beantwortung der Forschungsfragen führen sollen:

- Wie gehen die untersuchten Hauptschülerinnen und Hauptschüler beim Lösen der Aufgaben vor?

- Welche besonderen Schwierigkeiten zeigen sich beim Lösen der Untersuchungsaufgaben?
- Welche Fehler machen die untersuchten Hauptschülerinnen und Hauptschüler?
- Welche Vorstellungen haben die untersuchten Hauptschülerinnen und Hauptschüler von den Begriffen „Umfang“ und „Flächeninhalt“?

Ziel der Arbeit ist die Beschreibung und Strukturierung geometrischer Denkweisen von Hauptschülerinnen und Hauptschülern, die zu Schwierigkeiten bei der Bearbeitung von PISA-Aufgaben führen. Aus den Ergebnissen werden Konsequenzen für den Geometrieunterricht abgeleitet. Im Folgenden wird zusammenfassend ein inhaltlicher Überblick über die einzelnen Kapitel und den Aufbau der vorliegenden Arbeit gegeben.

Die anschließenden Kapitel 2 und 3 bilden den theoretischen Teil der Arbeit. In Kapitel 2 werden das Grundbildungskonzept von PISA und seine Umsetzung in den Geometrieaufgaben beschrieben. Grundlegende Aspekte geometrischen Denkens und geometrischer Begriffsbildung sowie ausgewählte Sichtweisen aus Kognitionspsychologie und Mathematikdidaktik werden in Kapitel 3 dargestellt.

In Kapitel 4 wird auf das Modell der Didaktischen Rekonstruktion eingegangen, welches einen Orientierungsrahmen für diese Arbeit liefert. Die Methodologie und das methodische Vorgehen werden in Kapitel 5 dargestellt. In Kapitel 6 folgen die Analysen der Untersuchungsaufgaben, die neben dem Grundbildungskonzept von PISA und den beschriebenen theoretischen Aspekten die Grundlage für die Auswertung bilden. Insbesondere werden in diesem Kapitel die PISA-Ergebnisse und die sich daraus ergebenden Konsequenzen für die ergänzende, qualitative Erhebung berücksichtigt.

Die Dokumentation und die Analysen der Ergebnisse erfolgen in Kapitel 7 und 8. Während in Kapitel 7 die Ergebnisse der vier Untersuchungsaufgaben auf einer beschreibenden und zusammenfassenden Ebene dargestellt werden, erfolgt in Kapitel 8 die Verbindung quantitativer und qualitativer Ergebnisse und die Beschreibung und Strukturierung geometrischer Denkweisen, so wie es Ziel der Arbeit ist. Abschließend werden in Kapitel 9 Konsequenzen der Ergebnisse für den Geometrieunterricht in der Hauptschule aufgezeigt. Eine Zusammenfassung der Arbeit erfolgt in Kapitel 10.

2 Das Grundbildungskonzept von PISA

„Our mathematical concepts, structures and ideas have been invented as tools to organize the phenomena of the physical, social and mental world.” (Freudenthal 1983, IX)

Im ersten Teil dieses Kapitels wird auf das Grundbildungskonzept als Orientierungsrahmen der PISA-Studie eingegangen (Abschnitt 2.1). Die Operationalisierung des Grundbildungskonzepts in den Geometrieaufgaben der PISA-Studie wird im zweiten Teil dargestellt (Abschnitt 2.2).

2.1 Das Grundbildungskonzept als Orientierungsrahmen der PISA-Studie

Im folgenden Abschnitt werden zunächst die Begriffe „Mathematical Literacy“ und „Mathematische Grundbildung“ vor ihrem mathematikdidaktischen Hintergrund erörtert. Daran schließt sich eine Darstellung der übergreifenden Ideen und Kompetenzklassen als wesentliche Merkmale zur Einordnung der Aufgaben des internationalen PISA-Tests an. Für den nationalen Ergänzungstest zu PISA, der zusätzliche Untersuchungen beinhaltet, wurde der Begriff der mathematischen Grundbildung unter Berücksichtigung der vorherrschenden unterrichtlichen Schwerpunkte in Deutschland ausdifferenziert und erweitert. Deshalb wird in einem nächsten Abschnitt auf die aus der Differenzierung in der deutschen Rahmenkonzeption resultierenden „Typen mathematischen Arbeitens“ und auf die Struktur des Aufgabenmodells beim nationalen Test eingegangen. Abschließend werden einige relevante Informationen zur Anlage und Umsetzung der PISA-Studie 2003 gegeben.

2.1.1 Mathematical Literacy“ und „Mathematische Grundbildung“ – mathematikdidaktische Hintergründe

Intention von PISA ist es, Indikatoren zu gewinnen, die konstruktiv nutzbare Hinweise auf den Stand der Bildung in den teilnehmenden Ländern ermöglichen. Auf diese Weise will PISA die Leistungsfähigkeit der Bildungssysteme messen. Die Studie ist so angelegt, dass grundlegende Stärken und Probleme identifiziert und empirisch belegt werden können (Neubrand 2004, 15).

Die Leistungstests in PISA orientieren sich dabei nicht nur an den curricularen Vorgaben in den einzelnen Ländern, sondern an einem Anspruch grundlegender Bildung für eine moderne, entwickelte Gesellschaft. Der Schlüsselbegriff hierfür ist „Mathematical Literacy“. In der internationalen Rahmenkonzeption

F. Ulfig, *Geometrische Denkweisen beim Lösen von PISA-Aufgaben,* Perspektiven der Mathematikdidaktik, DOI 10.1007/978-3-658-00588-7_2, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2013

von PISA heißt es dazu: “Der Begriff Grundbildung (literacy) wurde gewählt, um zu betonen, dass mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten, wie sie im traditionellen Curriculum der Schulmathematik definiert werden, im Rahmen von OECD/PISA nicht im Vordergrund stehen. Stattdessen liegt der Schwerpunkt auf der funktionalen Anwendung mathematischer Kenntnisse in ganz unterschiedlichen Kontexten und auf ganz unterschiedliche, Reflexion und Einsicht erfordernde Weise“ (OECD 1999, 47). „Mathematical Literacy” wird so definiert: „Mathematical literacy is an individual’s capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded mathematical judgement and to engage in mathematics, in ways that meet the needs of that individual’s current and future life as a constructive, concerned and reflective citizen.” (OECD 1999, 41). Diese Formulierung geht zurück auf internationale und nationale mathematikdidaktische Diskussionen, über die an dieser Stelle ein Überblick gegeben werden soll, mit dem Ziel, die inhaltliche Bedeutung von „Mathematical Literacy“ und „Mathematischer Grundbildung“ im mathematikdidaktischen und pädagogischen Feld zu verorten.

Bereits der im Jahr 1994 durchgeführte TIMSS-Leistungstest orientierte sich an einem Bild der Bedeutung von „Mathematik als Werkzeug“, welches sich im Literacy-Gedanken von PISA fortsetzt (Baumert u.a. 1997, 58). Dennoch richtete man sich in erster Linie nach curricularen Vorgaben: „Bei aller Variabilität innerhalb und zwischen den Ländern gibt es so etwas wie ein internationales Kerncurriculum des Mathematikunterrichts in der Mittelstufe, das in sehr unterschiedlicher Form im Lehrplan, im Lehrbuch oder im professionellen Selbstverständnis von Mathematiklehrern verankert sein kann.“ (Baumert u.a. 1997, 58). Bei TIMSS/III wurde schließlich zum ersten Mal das Konstrukt „Mathematical Literacy“ verwendet. In dieser Untersuchung am Ende der Sekundarstufe II wurde neben einem Test mit curricularen Elementen auch ein Literacy-Test durchgeführt. In der entsprechenden Rahmenkonzeption heißt es: “Unlike both other components of TIMSS and other IEA-Studies, the mathematics and science literacy study is not curriculum based (…) Instead, it is a study of the mathematics and science learning that final year students have retained regardless of their current areas of study” (Orpwood und Garden 1998, 10-11). Ein Literacy-Test greift also nicht auf einzelne stoffliche Elemente zurück, sondern auf das jeweilige Umfeld, in das diese Elemente eingebettet sind. Dabei stehen allgemeine mathematische Fähigkeiten im Vordergrund, wie zum Beispiel Mathematisieren, Vernetzten und Reflektieren. Diese findet man in den Lehrplänen oft am Anfang bei den allgemeinen Zielen, Schlüsselqualifikationen oder fachspezifischen beziehungsweise fachübergreifenden Kompetenzen. Vor allem, wenn man, wie in PISA, die Qualität mathematischer Fähigkeiten beschreiben will, um daraus letztendlich Hinweise zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts abzuleiten, ist dieser Literacy-Ansatz angemessen.

Die mathematikdidaktische Diskussion um allgemeine Ziele des Faches Mathematik ist breit gefächert, da die Aspekte, auf die sich mathematische Bildung bezieht, sehr vielfältig sind. Im folgenden Abschnitt werden einige Positionen dargestellt, die in engem Zusammenhang mit dem Literacy-Ansatz stehen.

Die internationale Rahmenkonzeption von PISA folgt im Wesentlichen den Vorstellungen des niederländisch-deutschen Mathematikers Hans Freudenthal (1973, 1983). Seine Ideen über Lehren und Lernen von Mathematik zielen vor allem auf Beziehungen zwischen Erfahrungen und Mathematik, einem zentralen Bestandteil von Literacy. Freudenthal argumentiert, dass alles Lernen und Lehren von Mathematik von der „Phänomenologie mathematischer Begriffe“ ausgehen müsse. Seine Sichtweise zielt darauf ab, dass nicht eine vorweggenommene Abstraktion und die anschließende Anwendung fertiger Konzepte, sondern der verständige, reflektierte Gebrauch in geeigneten Situationen das Lernen mathematischer Begriffe bestimme. Mathematische Begriffe werden demnach aus vielfältigen außer- und innermathematischen Situationen heraus gebildet und tragen umgekehrt „als Werkzeuge“ zur Erschließung „der Welt“ bei. Der Grundgedanke dahinter wird in der internationalen Rahmenkonzeption von PISA (OECD 1999, 41) wie folgt zitiert: „Our mathematical concepts, structures and ideas have been invented as tools to organise the phenomena of the physical, social and mental world.” (Freudenthal 1983, IX). Freudenthals Sichtweise beinhaltet eine „Orientierung an der Welt“, erschöpft sich aber nicht darin, sondern sieht dies als Bedingung, mathematische Begriffe als „mental objects“ auszubilden. Die Umsetzung dieser Ideen wurde im niederländischen Konzept der „Realistic Mathematics Education“ realisiert. Hierfür wurden Aufgaben entwickelt, in denen es nicht allein um den Einbezug von Anwendungen ging, sondern die von einer „realistischen“ Problemstellung ausgehen, an der mathematische Begriffe entwickelt werden. Die Aneignung der Begriffe steht hierbei im Vordergrund: „The real world problem will be used to develop mathematical concepts. (…) The problem is not in the first meant to be solved for problem solving purposes, but the real meaning lies in the underlying exploration of new mathematical concepts.” (de Lange 1996, 90)

Diese begriffsbildende Seite der Mathematik kommt auch in den PISA-Aufgaben zum Ausdruck. Der überwiegende Teil der Aufgaben wurde so konzipiert, dass der Übergang von den Phänomenen zum mathematischen Begriff deutlich wird. Faktenwissen und prozedurale Fertigkeiten und Fähigkeiten werden nicht isoliert erfasst, sondern stets eingebunden in kontextbezogene, problemorientierte Aufgaben. Diese Art von Aufgaben wird dem Literacy-Ansatz der internationalen Rahmenkonzeption gerecht.

Neubrand (2004) geht in seinen vertiefenden Analysen im Rahmen von PISA 2000 ausführlich auf die mathematikdidaktischen Hintergründe von „Mathematical Literacy“ und „Mathematischer Grundbildung“ ein. Neben Freudenthals Modell des Lehrens und Lernens von Mathematik, das Realitätsbezüge als Bedingung für die Ausbildung mathematischer Begriffe betont, nennt Neubrand zwei Sichtweisen aus der amerikanischen Mathematikdidaktik. Diese befassen sich im Rahmen der „Principles and Standards for School Mathematics“ (NCTM, 2000) mit der Bestimmung dessen, was mit Mathematik in der Ausbildung erreicht werden soll. Schlüsselbegriffe hierfür sind „literate citizenship“ und „mathematical proficiency“. Diese beiden Sichtweisen, die umfassende Ansprüche an „mathematische Fähigkeiten für alle“ darstellen, sollen hier aufgegriffen werden.

Schoenfeld (2001) geht davon aus, dass man als „literate citizen“ vor Problemen steht, die sich nicht mithilfe vorgefertigter Lösungen und standardisierten Verfahren bearbeiten lassen. Für jeden Beruf sei es wichtig, Entscheidungen zu treffen und Daten zu analysieren vor allem aber Daten und Fakten überzeugend darzustellen: „In short, the mathematical skills that will enhance the preparation of those who aspire to careers mathematics are the very same skills that will help people become informed and flexible citizens, workers, and consumers.“ (Schoenfeld 2001, 53) Es sei vor allem die Fähigkeit, „to make use of various modes of mathematical thought and knowledge to make sense of situations we encounter as we make our way through world”, die man tatsächlich benötige, betont Schoenfeld. Er fordert, im Unterricht vor allem kontextbezogene, problemhaltige Aufgaben zu stellen, die diese Fähigkeit ansprechen und die wesentlich sind für „literate citizenship“.

Klipatrick (2002) verwendet den Begriff „mathematical proficiency“, um „mathematische Bildung für alle“ zu erfassen. Für einen Bericht, der so genannten Mathematics Learning Study (Klipatrick, Swafford, Findell, 2001) an den National Research Council, formuliert er „five stands of mathematical proficiency“: (a) conceptual understanding, which refers to the student’s comprehension of mathematical concepts, operations and relations; (b) procedural fluency, or the student’s skill in carrying out mathematical procedures flexibly, accurately, efficiently, and appropriately; (c) strategic competence, the student’s ability to formulate, represent, and solve mathematical problems; (d) adaptive reasoning, the capacity for logical thought and for reflection on, explanation of, and justification of mathematical arguments; and (e) productive disposition, which includes the student's habitual inclination to see mathematics as a sensible, useful, and worthwhile subject to be learned, coupled with a belief in the value of diligent work and in one's own efficacy as a doer of mathematics." (Klipatrick 2002, 66)

Im Gegensatz zu Freudenthals und Schoenfelds Vorgehen, argumentiert Klipatrick sozusagen spiegelbildlich aus einer inneren Sicht der Mathematik heraus. Er geht aus von den Strukturen und dem Potenzial des Faches und kommt dennoch zu demselben Ergebnis, nämlich, dass der verständige Gebrauch mathematischer Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten in Problem- und Anwendungskontexten wesentlicher Teil mathematischer Grundbildung ist.

Klipatricks breit gefächert angelegte Sichtweise prägte auch die in Deutschland geführten Diskussionen zur mathematischen Allgemeinbildung. Neubrand (2004, 15-23) schildert in diesem Zusammenhang unter anderem Positionen von Tenorth (Tenorth 1994) und Winter (1995) sowie Inhalte des Gutachtens zum BLK-Modellversuch „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts" (BLK 1997). Im Abschnitt „Mathematik im Rahmen einer modernen Allgemeinbildung" dieses Gutachtens, wird beschrieben, dass sich die Mathematik im Spannungsfeld von „Abbildfunktion und systemischen Charakter" bewegt. Einerseits orientiert sich die Mathematik an der Welt, andererseits hat die Mathematik einen abstrakten und formalen Charakter und eine gewisse innere „Ordnung". Die Herausforderung an den Mathematikunterricht sei es, beide Aspekte miteinander zu verbinden.

Tenorth beschreibt die Spannung spezifisch-gegenstandsgebundener Kenntnisse und formaler Denkweisen aus einem anderen Theoriezusammenhang heraus, nämlich an den zwei Polen, „der Sicherung eines Minimalbestands an Kenntnissen" auf der einen Seite und der „Kultivierung der Lernfähigkeit" auf der anderen Seite (Tenorth 1994, 101). Mit der Kultivierung der Lernfähigkeit meint er, eine Sicherung von Lernfähigkeit, die über den kognitiv lernenden Umgang hinaus geht, indem der Lernprozess im Unterricht selbst zur Sprache gebracht wird. Im Bezug auf die Mathematik geht es vor allem um die begriffliche Vernetzung durch das Mathematisieren von Situationen. Notwendig dafür ist ein breites Bild von Mathematik, das Verfahren, mathematische Modelle und innermathematische Strukturen umfasst.

Winter bündelt in seinem Aufsatz „Mathematik und Allgemeinbildung" (Winter 1995) die Breite des Anspruchs an mathematische Allgemeinbildung in drei Grunderfahrungen: „(1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen; (2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen; (3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen (heuristische Fähigkeiten), zu erwerben.“ (Winter 1995, 37).

In Aspekt (1) ist die Anwendbarkeit der Mathematik angesprochen. Dies bedeutet vor allem zu erfahren, wie mathematische Modellbildung funktioniert. Voraussetzung dafür ist das Verfügen über Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten zu den verschiedenen Inhaltsbereichen der Mathematik, beispielsweise über Geometrie. Mit Aspekt (2) meint Winter die innere Struktur der Mathematik. Hier geht es darum zu erfahren, dass Menschen Begriffe bilden und dass man mit Begriffen ein ganzes Netz aufbauen kann. Mit ihrem hohen Grad an Vernetzung stellt die Mathematik als „Schule des Denkens“ ein reichhaltiges Potenzial für das Reflektieren über Wege des Denkens bereit. Hierdurch werden, wie in Aspekt (3) angesprochen, heuristische Strategien entwickelt, die sich auf andere Fächer und darüber hinaus auf unterschiedliche Bereiche des täglichen Lebens übertragen lassen.

Die geschilderten Sichtweisen zu „Mathematical Literacy“ und „Mathematischer Grundbildung“ bilden mathematikdidaktische Hinergründe zur Strukturierung der PISA-Aufgaben. In der internationalen Konzeption von PISA werden zwei wesentliche Merkmale zur Einordnung der Aufgaben beschrieben: die verschiedenen mathematischen Inhaltsbereiche (übergreifende Ideen) und die internationalen Kompetenzklassen (Abschnitt 2.1.2). Hinsichtlich der nationalen Erweiterung ist dies die Differenzierung der Aufgaben in Stoffgebiete und Typen mathematischen Arbeitens (Abschnitt 2.1.3). Darstellungen hierzu erfolgen in den nächsten beiden Abschnitten.

2.1.2 Die übergreifenden Ideen und Kompetenzklassen als Konstruktionsmerkmale des internationalen PISA-Tests

Die Klassifikation in die mathematischen Inhaltsbereiche folgt dem internationalen „Literacy“-Ansatz. Mathematische Begriffe, Methoden und Ideen werden danach im Sinne von Freudenthal (Abschnitt 2.1.1) als Werkzeuge betrachtet, mit denen die Phänomene der natürlichen, sozialen, kulturellen und mentalen „Welt“ beschrieben und strukturiert werden können. Mit der PISA-Studie soll überprüft werden, inwiefern Schülerinnen und Schüler diese Werkzeuge verständig anwenden können. Deshalb ist es naheliegend, die mathematischen