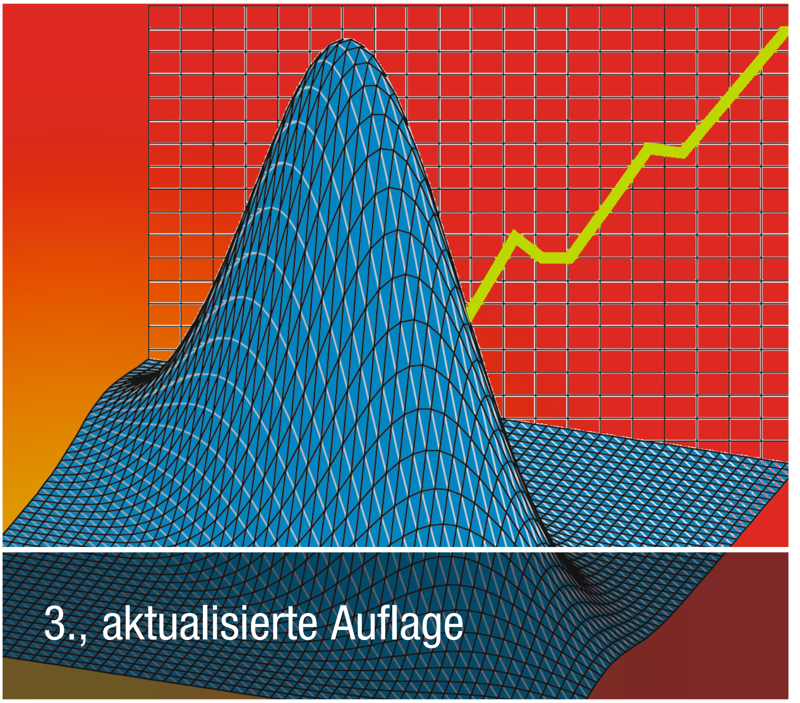
Christopher Dietmaier

Mathematik für Wirtschaftsingenieure

Lehr- und Übungsbuch



3., aktualisierte Auflage

HANSER

Christopher Dietmaier

Mathematik für Wirtschaftsingenieure

Christopher Dietmaier

Mathematik für Wirtschaftsingenieure

Lehr- und Übungsbuch

3., aktualisierte Auflage

Mit 294 Bildern, 373 Beispielen sowie 243 Aufgaben

Fachbuchverlag Leipzig
im Carl Hanser Verlag

Prof. Dr. Christopher Dietmaier
Ostbayerische Technische Hochschule Amberg-Weiden,
Fachbereich Wirtschaftsingenieurwesen

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C016439
www.fsc.org

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar.

ISBN 978-3-446-45431-6
E-Book-ISBN 978-3-446-45447-7

Carl Hanser Verlag

www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Mirja Werner
Herstellung: Katrin Wulst
Satz: Christopher Dietmaier, Hainsacker
Druck und Bindung: Hubert & Co, Göttingen
Printed in Germany

Vorwort

Die Tätigkeiten und Verantwortungsbereiche von Wirtschaftsingenieuren sind geprägt von komplexen technischen und wirtschaftlichen Aufgaben- und Problemstellungen. Das Studium vermittelt dazu fundierte naturwissenschaftlich-technische und betriebswirtschaftliche Kenntnisse und Fähigkeiten. Grundlage und Voraussetzung hierfür ist die Mathematik. Zusätzlich zu den Gebieten und Problemstellungen der Ingenieurmathematik spielen für Wirtschaftsingenieure auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik sowie weitere mathematische Gebiete wie z.B. die lineare Optimierung eine wichtige Rolle. Weder Lehrbücher der Ingenieurmathematik noch Lehrbücher der Wirtschaftsmathematik behandeln alle diese Gebiete. Es besteht der Bedarf an einem Mathematiklehrbuch für Wirtschaftsingenieure, welches alle für das Studium und die Berufspraxis relevanten Gebiete der Mathematik mit technischen und wirtschaftlichen Anwendungsbeispielen behandelt.

Mit diesem Buch soll ein solches Lehrbuch bereitgestellt werden. Es ist als Lehr- und Übungsbuch konzipiert, mit dem man sich vorlesungsbegleitend oder im Selbststudium die von Wirtschaftsingenieuren benötigte Mathematik erarbeiten kann. Dabei spielen die Übungsaufgaben mit Musterlösungen sowie eine klare, aufeinander aufbauende Struktur eine wichtige Rolle. Durch diese klare Struktur und durch übersichtliche Hervorhebungen der wichtigsten Ergebnisse und Formeln eignet sich das Buch aber auch als Nachschlagewerk für die Praxis. Hauptzielgruppe dieses Buches sind Studenten des Studienganges Wirtschaftsingenieurwesen an Fachhochschulen. Da die Ingenieurmathematik einen Teil des Inhalts bildet, eignet es sich aber auch für reine Ingenieurstudiengänge an Fachhochschulen. Entsprechend dieser Zielgruppe ist eine strenge, durchgängige und vollständige Beweisführung nicht das oberste Ziel dieses Buches, weshalb auf eine Aneinanderreihung von Sätzen und Beweisen verzichtet wird. Auch aus didaktischen Gründen wird viel Wert auf die Darstellung des Anwendungsbezuges gelegt. Anwendungsbeispiele werden nicht nur als Abschluss, sondern oft am Anfang eines Gebietes vorgestellt, um dann induktiv in das Thema einzudringen und Aussagen herzuleiten. Sätze erscheinen dann als Ergebnisse dieser Ausführungen und nicht einfach hingeschrieben, um anschließend bewiesen zu werden. Entsprechend der Zielsetzung des Buches kann und soll nicht alles bewiesen werden. Manche Herleitungen werden nur skizziert, anderes wird nicht in voller Allgemeinheit hergeleitet, manches bleibt unbewiesen. Trotzdem kann und soll jedoch nicht auf Herleitungen und Beweise verzichtet werden. Mathematik als Werkzeugkasten, aus dem man lediglich Werkzeuge (Formeln) herausnimmt und anwendet, reicht als Grundlage für das Studium und die Berufspraxis nicht aus. Vielmehr muss man in der Lage sein, die Funktionsweise und Einsatzmöglichkeiten der Werkzeuge zu verstehen und ggf. selbst Werkzeuge zu entwickeln, d.h. Ergebnisse herzuleiten.

Es war eine Herausforderung, die Fülle der für Wirtschaftsingenieure relevanten mathematischen Gebiete in einem einbändigen Werk zu behandeln. Ein sinnvoller und geeigneter Weg im Spannungsfeld von mathematischer Präzision und Verständlichkeit, Abstraktion und Anschaulichkeit, Ausführlichkeit und prägnanter Darstellung, Theorie und Anwendungsbezug musste gefunden werden. Da in der Praxis mathematische Problemstellungen oft den Einsatz von Computern erfordern, widmet sich ein eigenes Kapitel der Lösung mathematischer Probleme mit dem Computer. Am Beispiel des Mathematik-Softwaresystems Maple® wird gezeigt, wie die in diesem Buch behandelten mathematischen Probleme mit Hilfe eines solchen Systems gelöst werden können. Das System Maple® war (in Verbindung mit der Grafiksoftware Corel®) auch unerlässliches Werkzeug für die Erstellung der Bilder.

In der dritten Auflage wurden Druckfehler korrigiert. Für entsprechende Hinweise bedanke ich mich, ebenso im Voraus für weitere Anregungen und Verbesserungsvorschläge. Für die Arbeit mit diesem Buch wünsche ich allen Lesern viel Freude an der Mathematik!

Weiden, im Juli 2017 Christopher Dietmaier

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Aussagen

Mathematik besteht aus *Aussagen* und logischem Schließen und basiert damit auf der *Aussagenlogik*.

Eine Aussage ist eine Behauptung, die entweder wahr oder falsch ist.

Entscheidend ist nicht, dass man feststellen kann, ob die Behauptung wahr oder falsch ist, sondern dass feststeht, dass sie genau eines von beiden ist. Aussagen werden durch Zeichen (hier: Großbuchstaben) dargestellt. Diese Zeichen als Platzhalter für Aussagen heißen Aussagevariablen. Jede Aussage besitzt also genau einen der zwei Wahrheitswerte „wahr“ oder „falsch“. Der Wahrheitswert „wahr“ wird durch die **1**, der Wahrheitswert „falsch“ durch die **0** dargestellt. Im folgenden Beispiel handelt es sich bei der Behauptung C nicht um eine Aussage. Die Behauptung B ist eine Aussage, auch wenn der Wahrheitswert sich vielleicht niemals feststellen lässt. Die Behauptung A ist eine (falsche) Aussage.

Beispiel 1.1

a) A: Die Zahl π ist eine rationale Zahl.
b) B: In anderen Galaxien (außerhalb der Milchstraße) gibt es Lebewesen.
c) C: Mathematik ist das schönste Fach im Studium Wirtschaftsingenieurwesen.

Aussagenoperationen bzw. *Aussagenverknüpfung* machen aus einer Aussage eine neue Aussage bzw. verknüpfen zwei Aussagen zu einer neuen Aussage. Die elementarsten Aussagenoperationen und Aussagenverknüpfungen sind die folgenden:

Negation:	$\overline{A}$	„nicht A“
Konjunktion:	$A \wedge B$	„A und B“
Disjunktion:	$A \vee B$	„A oder B“
Implikation:	$A \Rightarrow B$	„aus A folgt B“

Diese Aussagenoperation und Aussagenverknüpfungen lassen sich dadurch definieren, dass man für alle möglichen Wahrheitswerte von A bzw. von A und B angibt, welchen Wahrheitswert die neue Aussage haben soll. Dies geschieht in einer Wahrheitstabelle:

A	B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1

Vielleicht nicht intuitiv unmittelbar einleuchtend sind die ersten zwei Werte in der Definition der Implikation. Intuitiv einsehbar ist jedoch die Gleichwertigkeit der Aussage „Wenn A gilt, dann gilt auch B" mit der Aussage „Wenn B nicht gilt, dann gilt auch A nicht". Diese Gleichwertigkeit von $A \Rightarrow B$ mit $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ lässt sich mit der Wahrheitstabelle zeigen:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\overline{B}$	$\overline{A}$	$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

Für jede mögliche Kombination der Wahrheitswerte von A und B hat die Aussage $A \Rightarrow B$ immer den gleichen Wahrheitswert wie die Aussage $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. Wäre der erste Wert in der Definition der Implikation 0 statt 1, so wäre diese Gleichwertigkeit nicht mehr gegeben. In der folgenden Tabelle werden zwei weitere Verknüpfungen, die ***Äquivalenz*** $A \Leftrightarrow B$ und das ***ausschließende Oder*** $A \vee_e B$ („entweder oder", „exclusive or") definiert:

A	B	$A \vee_e B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Für diese Verknüpfungen gilt:

$$A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$
$$A \vee_e B = (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)$$

Das Gleichheitszeichen ist so zu verstehen, dass für alle möglichen Kombinationen der Wahrheitswerte der eingehenden Aussagenvariablen die Aussagen links und rechts des Gleichheitszeichens immer den gleichen Wahrheitswert haben. In diesem Sinne gelten auch die folgenden Gleichungen, die sich mit Wahrheitstabellen leicht beweisen lassen:

$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B} \tag{1.1}$$
$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B} \tag{1.2}$$
$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$
$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

Eine Gleichheit zweier Aussagen wie z.B. $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ kommt auch dadurch zum Ausdruck, dass die Äquivalenz der beiden Aussagen immer wahr ist. Man nennt dies auch eine ***Tautologie***:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Die Gleichheit $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ findet Verwendung beim ***indirekten Beweis***. Statt aus einer wahren Aussage A eine Aussage B zu folgern nimmt man an, dass B nicht gilt und schließt daraus, dass dann auch A nicht gilt.

Beispiel 1.2 Indirekter Beweis

Wir beweisen, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist. Wäre $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl, so ließe sich $\sqrt{2}$ als Quotient teilerfremder natürlicher Zahlen darstellen. Es soll nun bewiesen werden, dass dies nicht möglich ist.

A: p und q teilerfremde natürliche Zahlen

B: $\sqrt{2} \neq \dfrac{p}{q}$

Statt der Folgerung $A \Rightarrow B$ erfolgt beim indirekten Beweis die Folgerung $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

$\overline{B}: \sqrt{2} = \dfrac{p}{q} \Rightarrow 2 = \dfrac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ gerade $\Rightarrow p$ gerade $\Rightarrow p = 2p'$

$\Rightarrow p^2 = 4p'^2 \Rightarrow 2q^2 = 4p'^2 \Rightarrow q^2 = 2p'^2 \Rightarrow q^2$ gerade $\Rightarrow q$ gerade $\Rightarrow q = 2q'$

$\Rightarrow p$ und q besitzen den gemeinsamen Teiler 2 $\Rightarrow \overline{A}$.

In der Mathematik nennt man Aussagen, die als wahr betrachtet, jedoch nicht hergeleitet werden, ***Axiome***. Ersetzt man in einer Aussage A eine Konstante durch die Variable x, so entsteht eine ***Aussageform*** $A(x)$.

Beispiel 1.3 Aussageform

Ersetzt man in der wahren Aussage A: $3^2+4^2=5^2$ die Zahl 2 durch eine Variable x, so entsteht die Aussageform $A(x): 3^x+4^x=5^x$. Diese Aussageform ist wahr für $x=2$ und falsch für alle anderen Zahlen x.

Ergänzt man eine Aussageform $A(x)$ zu einer der folgenden Aussagen

- $A(x)$ für alle x
- Es existiert mindestens ein x mit der Eigenschaft $A(x)$

so erhält man wieder Aussagen. Diese Ergänzungen heißen ***Quantoren***. Besonders wichtig sind die zwei genannten Quantoren:

- $\ldots\forall x$ „... für alle x"
- $\exists x\,|\ldots$ „Es existiert (mindestens) ein x mit der Eigenschaft ..."

Beispiel 1.4 Quantoren

Die Aussage $3^x+4^x=5^x\,\forall x$ ist eine falsche Aussage.

Die Aussage $\exists x\big|3^x+4^x=5^x$ ist eine wahre Aussage.

1.2 Mengen

Wir betrachten bestimmte, unterscheidbare Objekte, die durch eine *Zugehörigkeit* zu einer so genannten ***Grundmenge***, gekennzeichnet sind: Alle Objekte gehören zur Grundmenge G.

Eine ***Menge*** M ist ein Objekt mit folgender Eigenschaft: Bestimmte Elemente aus der Grundmenge gehören zu M, alle anderen Elemente nicht.

Die Menge, zu der kein Element gehört, heißt ***leere Menge***. Mengen werden i.d.R. mit Großbuchstaben, Elemente mit Kleinbuchstaben dargestellt. Zur Beschreibung einer Menge werden die Elemente in geschweiften Klammern aufgezählt oder mit Hilfe von Aussageformen beschrieben:

a) Aufzählung der Elemente $M=\{a_1, a_2, \ldots\}$
b) Beschreibung mit Hilfe von Aussageformen $M=\{x\,|\,A(x)\}$

Die leere Menge wird mit dem Symbol { } oder $\varnothing$ bezeichnet. Für die *Zugehörigkeit* eines Elementes a zu einer Menge M verwendet man folgende Schreib- bzw. Sprechweisen:

Zugehörigkeit:	$a \in M$	„*a* ist Element von *M*“
Keine Zugehörigkeit:	$a \notin M$	„*a* ist nicht Element von *M*“

Die Aussagen $A \subset B$ und $A = B$ haben folgende Bedeutung:

$A \subset B \Leftrightarrow x \in B \;\; \forall x \in A$	*A* ist ***Teilmenge*** von *B*
$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$	***Gleichheit*** von *A* und *B*

Mengen werden häufig mit Euler-Venn-Diagrammen anschaulich dargestellt.

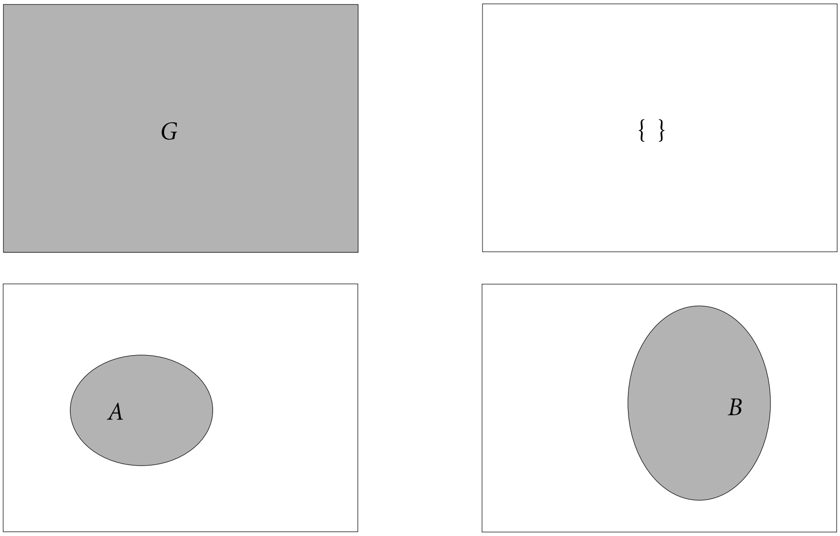


Bild 1.1 Euler-Venn-Diagramme

Die folgenden ***Mengenoperationen*** werden jeweils durch ein Euler-Venn-Diagramm veranschaulicht.

Schnittmenge $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

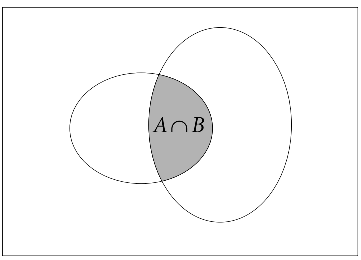


Bild 1.2

Vereinigungsmenge $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

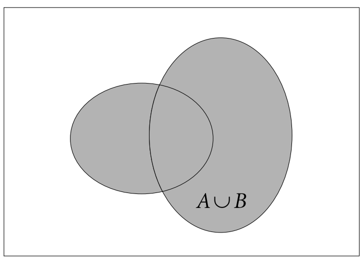


Bild 1.3

Differenzmenge $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ ***Komplement*** $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$

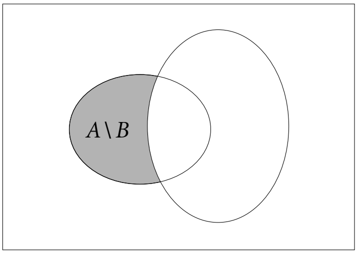


Bild 1.4

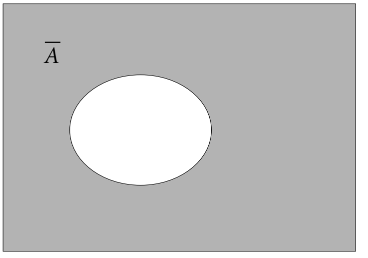


Bild 1.5

Für die Mengenoperationen gelten folgende Gesetze:

Kommutativgesetze	$A \cap B = B \cap A$
	$A \cup B = B \cup A$
Assoziativgesetze	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Distributivgesetze	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Neutralität	$A \cap G = A$
	$A \cup \{\ \} = A$
Komplementarität	$A \cap \overline{A} = \{\ \}$
	$A \cup \overline{A} = G$
	$G = \overline{\{\ \}}$
	$\overline{G} = \{\ \}$
De Morgansche Regeln	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Unter einer ***Produktmenge*** $A \times B$ zweier Mengen A und B versteht man die Menge

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Beispiel 1.5 $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$

Entsprechend sind Produktmengen mehrerer Mengen definiert:

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in M_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in M_n\}$$

Beispiel 1.6 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$

1.3 Abbildungen und Verknüpfungen

Bei einer Menge $M \subset D \times B$ mit den zwei Eigenschaften

1. Zu jedem $x \in D$ gibt es ein $y \in B$ mit $(x, y) \in M$.
2. Für alle $x \in D$ und $y, z \in B$ gilt: $(x, y) \in M \wedge (x, z) \in M \Rightarrow y = z$

spricht man von einer ***Abbildung*** der Menge D auf die Menge B.

Schreibweise: $D \to B$

Bei einer Abbildung $D \to B$ ist *jedem* Element von D *genau ein* Element von B zugeordnet. Sind D und B Teilmengen der reellen Zahlen, so spricht man von einer ***Funktion***. Die Gleichung $y = f(x)$, die angibt, welche Zahl $y \in B$ einer Zahl $x \in D$ zugeordnet wird, heißt Funktionsgleichung.

Beispiel 1.7 $D = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$, $B = \mathbb{R}$, $M = \{(x, y) \mid x \in D \wedge y = \sqrt{1 - x^2}\}$

Jedem $x \in D$ ist genau ein $y \in B$ zugeordnet. Es liegt eine Abbildung vor. Die Funktionsgleichung lautet $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Beispiel 1.8 $D = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$, $B = \mathbb{R}$, $M = \{(x, y) \mid x \in D \wedge x^2 + y^2 = 1\}$

Es handelt sich nicht um eine Abbildung, da jedem $x \in]-1, 1[\subset D$ die zwei Elemente $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ zugeordnet sind.

Eine Abbildung $M_1 \times M_2 \to M_3$, die jedem Element $(a, b) \in M_1 \times M_2$ ein Element $a \circ b \in M_3$ zuordnet, heißt ***Verknüpfung***.

Beispiel 1.9 Das Vektorprodukt

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \vec{a}, \vec{b} \to \vec{a} \times \vec{b}$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$

Für Verknüpfungen $M \times M \to M$ wird Folgendes definiert:

Die Verknüpfung heißt ***assoziativ***, wenn	$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \;\; \forall a, b, c \in M$.
Die Verknüpfung heißt ***kommutativ***, wenn	$a \circ b = b \circ a \;\; \forall a, b \in M$.
e heißt ***neutrales Element***, wenn	$a \circ e = e \circ a = a \;\; \forall a \in M$.
a^{-1} heißt das zu a ***inverse Element***, wenn	$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Beispiel 1.10 Addition reeller Zahlen

Die Verknüpfung + (Addition) für reelle Zahlen ist assoziativ und kommutativ. Das neutrale Element ist die Zahl 0, das zu einer Zahl a inverse Element ist die Zahl $-a$.

Beispiel 1.11 Vektorprodukt

Das in Beispiel 1.8 aufgeführte Vektorprodukt ist weder assoziativ noch kommutativ. Es gibt kein neutrales und damit auch kein inverses Element.

Eine ***Gruppe*** ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $\circ$ und folgenden Eigenschaften:

- Die Verknüpfung ist assoziativ.
- Es existiert ein neutrales Element.
- Zu jedem $a \in G$ existiert ein inverses Element.

Eine Gruppe mit einer kommutativen Verknüpfung heißt ***kommutative Gruppe***.

Beispiel 1.12

Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen bildet mit der Addition + eine kommutative Gruppe.

Ein ***Körper*** ist eine Menge K mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ und folgenden Eigenschaften (e^+ ist das neutrale Element der Verknüpfungen $+$):

- K bildet mit der Verknüpfung $+$ eine kommutative Gruppe.
- $K \setminus \{e^+\}$ bildet mit der Verknüpfung $\cdot$ eine kommutative Gruppe.
- Es gilt das Distributivgesetz: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \;\forall x, y, z \in K$.

Beispiel 1.13

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen bildet mit der Addition + und der Multiplikation $\cdot$ einen Körper.

1.4 Die reellen Zahlen und Teilmengen der reellen Zahlen

1.4.1 Eigenschaften der reellen Zahlen

Bei der Einführung von Zahlenmengen beginnt man häufig mit der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Nach der Erklärung der Addition und Multiplikation stellt man fest, dass nicht alle Gleichungen, die mit diesen Verknüpfungen gebildet werden können, eine Lösung besitzen. Die Forderung der Lösbarkeit von Gleichungen und der Existenz von inversen Elementen führt zu einer Erweiterung der Zahlenmenge über die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen und die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen schließlich zu der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Zahlenmenge M	**Beispiel für Gleichungen, die in** M **nicht lösbar sind**	**Nicht existent in** M
Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$ $\downarrow$	$3+x=2$	Inverse Elemente für Addition Inverse Elemente für Multiplikation
Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$ $\downarrow$	$3\cdot x=2$	Inverse Elemente für Multiplikation
Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ $\downarrow$	$x\cdot x=2$	
Reelle Zahlen $\mathbb{R}$	$x\cdot x=-2$	

Dieser Weg von den natürlichen zu den reellen Zahlen soll hier nicht nachvollzogen werden. Stattdessen sollen hier die Ergebnisse dargestellt werden: Die grundlegenden Eigenschaften der reellen Zahlen, aus denen alle weiteren Eigenschaften gefolgert werden können. Da diese Eigenschaften auch dazu verwendet werden, die reellen Zahlen axiomatisch einzuführen, heißen sie ***Axiome der reellen Zahlen***.

Körperaxiom

Es gibt zwei Verknüpfungen $+$ (***Addition***) und $\cdot$ (***Multiplikation***) mit folgender Eigenschaft: Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen bilden mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ einen Körper.

Das neutrale Element der Addition bzw. Multiplikation ist die Zahl 0 bzw. 1. Das zu einer Zahl $a\in\mathbb{R}$ inverse Element bez. Addition bzw. Multiplikation wird mit $-a$ bzw. mit a^{-1} bezeichnet. Mit den inversen Elementen definiert man die Subtraktion und Division:

Subtraktion: $a-b=a+(-b)$ Division: $\dfrac{a}{b}=a\cdot b^{-1}$

Anordnungsaxiome

Es gibt eine Teilmenge $M\subset\mathbb{R}$ (***positive Zahlen***) mit folgenden Eigenschaften:

1. Für jede Zahl $a\in\mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Aussagen:
   $a\in M$, $a=0$, $-a\in M$
2. $a\in M \wedge b\in M \Rightarrow a+b\in M$
3. $a\in M \wedge b\in M \Rightarrow a\cdot b\in M$

Für $a \in M$ schreibt man $a > 0$. Der Ausdruck $a > b$ bzw. $a < b$ bedeutet $a - b > 0$ bzw. $b - a > 0$. Die Aussage $a \geq b$ bzw. $a \leq b$ ist äquivalent zu $a > b \vee a = b$ bzw. $a < b \vee a = b$. Die Menge M wird auch mit $\mathbb{R}^+$ bezeichnet. Die Körper- und Anordnungsaxiome beinhalten die bekannten Rechenregeln für das Rechnen mit reellen Zahlen.

Vollständigkeitsaxiom

Eine Menge M heißt ***nach oben beschränkt*** bzw. ***nach unten beschränkt***, wenn es eine Zahl a gibt (***obere Schranke*** bzw. ***untere Schranke***) mit $x \leq a \ \forall x \in M$ bzw. $x \geq a \ \forall x \in M$. Die kleinste obere bzw. größte untere Schranke einer Menge M heißt ***Supremum*** bzw. ***Infimum*** der Menge M und wird mit $\sup M$ bzw. $\inf M$ bezeichnet. Gehört das Supremum bzw. Infimum zur Menge M, so wird es ***Maximum*** bzw. ***Minimum*** der Menge M genannt und mit $\max M$ bzw. $\min M$ bezeichnet. Das Vollständigkeitsaxiom lautet:

Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum $a \in \mathbb{R}$.

Das Vollständigkeitsaxiom kann auch folgendermaßen formuliert werden:

Für jede Zerlegung der Menge $\mathbb{R}$ in zwei nichtleere Teilmengen $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$ mit den zwei Eigenschaften („Dedekindscher Schnitt")

1. $A \cup B = \mathbb{R}$
2. $x < y \ \forall x \in A, y \in B$

gibt es genau eine „Trennungszahl" $t \in \mathbb{R}$ mit

$x \leq t \leq y \ \forall x \in A, y \in B$

Für die Menge der rationalen Zahlen gilt das Vollständigkeitsaxiom nicht. Um dies zu sehen, zerlegen wir die Menge $\mathbb{Q}$ in die Mengen

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 \leq 2 \vee x < 0\} \text{ und } B = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 > 2 \wedge x > 0\}.$$

Für diese Zerlegung gilt:

$$A \cup B = \mathbb{Q} \text{ und } x < y \ \forall x \in A, y \in B.$$

Für die „Trennungszahl" $t = \sqrt{2}$ gilt:

$$x \leq t \leq y \ \forall x \in A, y \in B$$

Diese Zahl gehört weder zu A noch zu B (s. Beispiel 1.2). Sie liegt „zwischen" den Mengen A und B. Auf der Zahlengeraden gibt es einen Punkt, der weder zu A noch zu B gehört. Die Menge der Punkte auf der Zahlengeraden, welche rationale Zahlen darstellen, hat „Lücken“. Das Vollständigkeitsaxiom drückt aus, dass die reellen Zahlen im Gegensatz zu den rationalen Zahlen ein „lückenloses Kontinuum“ bilden: Jeder reellen Zahl entspricht ein Punkt auf der Zahlengeraden und umgekehrt. Es gibt keinen Punkt auf der Zahlengeraden, der keine reelle Zahl darstellt.

1.4.2 Wichtige Teilmengen der reellen Zahlen

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$ $\quad \mathbb{N}_0=\{0,1,2,3,\dots\}$

Ganze Zahlen $\mathbb{Z}=\{x \mid x\in\mathbb{N} \vee -x\in\mathbb{N} \vee x=0\}$

Rationale Zahlen $\mathbb{Q}=\{x \mid x=p/q, p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}\}$

Positive reelle Zahlen $\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R} \mid x>0\}$

$\mathbb{R}_0^+=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 0\}=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$

Intervalle

$[a,\infty[=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq a\}$ $\quad]a,\infty[=\{x\in\mathbb{R} \mid x>a\}$

$]-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq a\}$ $\quad]-\infty,a[=\{x\in\mathbb{R} \mid x<a\}$

$[a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x\leq b\}$ $\quad]a,b[=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$

$[a,b[=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x<b\}$ $\quad]a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\leq b\}$

ε-Umgebungen

In der Analysis werden häufig sog. ε-Umgebungen betrachtet. Darunter versteht man die folgenden Mengen:

ε-Umgebungen $U_\varepsilon(x_0)$ von x_0:

$$U_\varepsilon(x_0)=\{x \mid x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon\}=]x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon[$$

Punktierte ε-Umgebungen $U_\varepsilon^\bullet(x_0)$ von x_0:

$$U_\varepsilon^\bullet(x_0)=U_\varepsilon(x_0)\setminus\{x_0\}=]x_0-\varepsilon,x_0[\ \cup\ ]x_0,x_0+\varepsilon[$$

1.5 Summen, Produkte und vollständige Induktion

Für Summen und Produkte von n Zahlen werden folgende Schreibweisen verwendet:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k \qquad a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=\prod_{k=1}^{n}a_k$$

Das Summen- bzw. Produktzeichen Σ bzw. Π kann auch mehrfach verwendet werden. Für die Summe bzw. das Produkt der mn Zahlen

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

schreibt man

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ik} = a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n} + \ldots + a_{m1} + a_{m2} + \ldots + a_{mn} \text{ bzw.}$$

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{m} a_{ik} = a_{11} \cdot a_{12} \cdot \ldots \cdot a_{1n} \cdot \ldots \cdot a_{m1} \cdot a_{m2} \cdot \ldots \cdot a_{mn}$$

Wir schreiben die Summe

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$$

zweimal mit verschiedener Reihenfolge der Summanden auf.

$$\begin{array}{ccccccccccc} s_n & = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & (n-1) & + & n \\ s_n & = & n & + & (n-1) & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\ 2s_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

Wir addieren die zwei Reihen und erhalten $2s_n = n(n+1)$. Es gilt also

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

Dieses Ergebnis lässt sich auch auf eine andere Weise herleiten. Dazu betrachtet man eine Aussageform $A(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$. Will man beweisen, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so muss man zeigen, dass $A(n)$ für $n = 1$ gilt und dass aus der Gültigkeit von $A(n)$ die Gültigkeit von $A(n+1)$ folgt. Dieses Verfahren heißt Beweis durch ***vollständige Induktion***.

Beweis durch vollständige Induktion

Zu beweisen:	$A(n) \forall n \in \mathbb{N}$
1. Schritt:	$A(1)$
2. Schritt:	$A(n) \Rightarrow A(n+1)$

Beispiel 1.14

Zu beweisen: $A(n): s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$

1. Schritt: $A(1): s_1 = \sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1}{2} 1 \cdot 2$

2. Schritt: $A(n): s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right) + (n+1) = \frac{1}{2} n(n+1) + (n+1)$$

$$= \frac{1}{2}(n(n+1) + 2(n+1)) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \Rightarrow A(n+1)$$

Durch vollständige Induktion lässt sich auch der folgende Satz beweisen:

Binomischer Lehrsatz

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n \tag{1.3}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

In (1.3) treten die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ auf. Um die Definition der Binomialkoeffizienten angeben zu können, müssen wir die ***Fakultät*** $n!$ einer Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ definieren:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \text{ für } n \in \mathbb{N} \tag{1.4}$$

$$0! = 1 \tag{1.5}$$

Der ***Binomialkoeffizient*** $\binom{n}{k}$ wird nun folgendermaßen definiert:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ mit } n, k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } k \le n \tag{1.6}$$

Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ kann man auch aus dem „Pascal-Dreieck“ ablesen:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\iddots & & \iddots & & & & \ddots & & \ddots
\end{array}
$$

Die in diesem Dreieck auftretenden Zahlen haben folgende Bedeutung:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\iddots & & \iddots & & & & \ddots & & \ddots
\end{array}
$$

Für die Binomialkoeffizienten gelten folgende Beziehungen, deren Gültigkeit man am Pascalschen Dreieck erkennt und mit (1.6) leicht beweisen kann.

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n} \tag{1.7}$$

$$\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1} \tag{1.8}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{1.9}$$

Aus dem Binomischen Lehrsatz erhält man z.B. die Formeln:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

1.6 Aufgaben

Aufgabe 1.1

Beweisen Sie mit Hilfe von Wahrheitstabellen die De Morganschen Regeln (1.1) und (1.2) der Aussagenlogik.

Aufgabe 1.2

Zeigen Sie: Wählt man bei der Definition der Implikation in der Wahrheitstabelle die ersten zwei Werte anders, als dies in Abschnitt 1.1 geschehen ist, so gilt entweder die Gleichheit $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ nicht mehr oder man erhält die Gleichheit $A \Rightarrow B = B \Rightarrow A$.

Aufgabe 1.3

Beweisen Sie indirekt, dass $\sqrt{3}$ keine rationale Zahl ist. Hinweis: Das Produkt zweier ganzer Zahlen ist genau dann durch 3 teilbar, wenn mindestens ein Faktor durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 1.4

Zeigen Sie, dass folgende Gleichung gilt:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Aufgabe 1.5

Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgenden Formeln:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

e) $(1+x)^n \geq 1+nx$ für $x \geq -1$