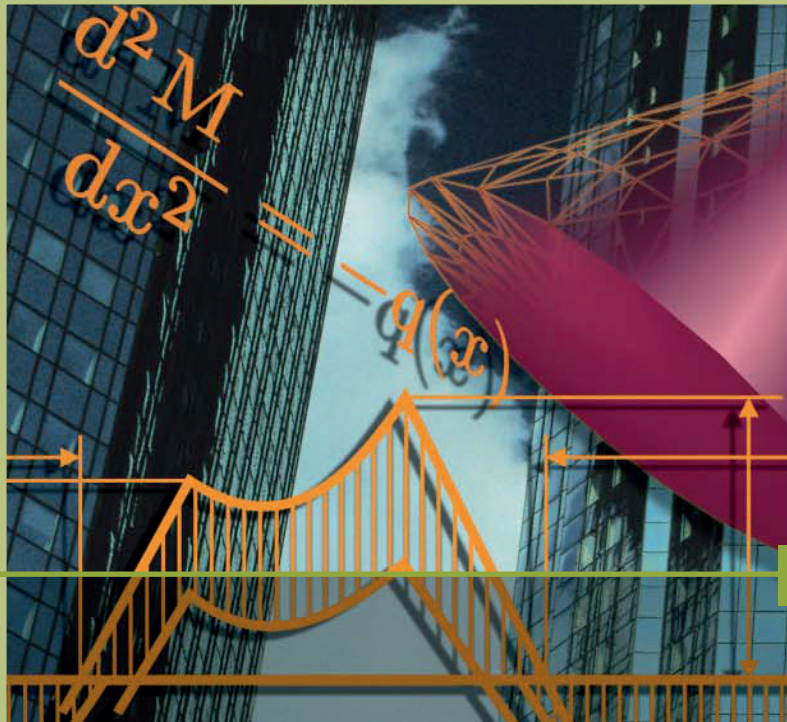


Kerstin Rjasanowa

Mathematik für Bauingenieure 2

Ausgewählte Kapitel für Ingenieure im Master-Studium



HANSER

Lehrbücher des Bauingenieurwesens

Bletzinger/Dieringer/Fisch/Philipp • *Aufgabensammlung zur Baustatik*

Dallmann • *Baustatik*

Band 1: Berechnung statisch bestimmter Tragwerke

Band 2: Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke

Band 3: Theorie II. Ordnung und computerorientierte Methoden der Stabtragwerke

Engel/Lauer • *Einführung in die Boden- und Felsmechanik*

Engel/Al-Akel • *Einführung in den Erd-, Grund- und Dammbau*

Fouad/Zapke • *Bauwesen Taschenbuch*

Freimann • *Hydraulik für Bauingenieure*

Göttsche/Petersen • *Festigkeitslehre – klipp und klar
für Studierende des Bauingenieurwesens*

Jochim/Lademann • *Planung von Bahnanlagen*

Krawietz/Heimke • *Physik im Bauwesen*

Malpricht • *Schalungsplanung*

Proporowitz (Hrsg.) • *Baubetrieb – Bauverfahren*

Proporowitz (Hrsg.) • *Baubetrieb – Bauwirtschaft*

Prüser • *Konstruieren im Stahlbetonbau 1*

Prüser • *Konstruieren im Stahlbetonbau 2*

Rjasanowa • *Mathematik für Bauingenieure 1*

Rjasanowa • *Mathematische Modelle im Bauingenieurwesen*

Kerstin Rjasanowa

Mathematik für Bauingenieure 2

Ausgewählte Kapitel für Ingenieure im Master-Studium

Mit zahlreichen Bildern,
Tabellen, Beispielen und Aufgaben mit Lösungen



Fachbuchverlag Leipzig
im Carl Hanser Verlag

Autor

Prof. Dr. rer. nat. Kerstin Rjasanowa
Hochschule Kaiserslautern
Fachbereich Bauen und Gestalten
<http://www.fh-kl.de/~kerstin.rjasanowa>



Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 URG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag

© 2017 Carl Hanser Verlag München
Internet: <http://www.hanser.de>

Lektorat: Philipp Thorwirth
Herstellung: Franziska Kaufmann
Satz: Kerstin Rjasanowa
Coverconcept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Coverrealisierung: Stephan Rönigk
Druck und Bindung: Kösel, Krugzell
Printed in Germany
ISBN: 978-3-446-44950-3
E-Book-ISBN: 978-3-446-44951-0

Vorwort

*„Jede Wissenschaft ist so weit Wissenschaft, wie
Mathematik in ihr ist.“*

Immanuel Kant (1724 - 1804)

Mit Einführung der Bachelor- und Masterstudiengänge an den deutschen Hochschulen haben sich gleichzeitig neue Anforderungen für deren inhaltliche Gestaltung ergeben. Das vorliegende Buch, das auf der Basis meiner Vorlesungen in Mathematik im Masterstudiengang Bauingenieurwesen an der Hochschule Kaiserslautern entstanden ist, trägt dieser aktuellen Entwicklung Rechnung. Kapitel 1 beschäftigt sich mit Funktionen mehrerer Veränderlicher sowie deren Differenzialrechnung und Integralrechnung, die u. a. die Ermittlung von Extremwerten bzw. die Berechnung von Momenten für Flächen und Volumina auch bei inhomogener Dichteverteilung ermöglicht. Gleichzeitig ist es Voraussetzung für das Kapitel 2, das Grundlagen für das Lösen gewöhnlicher Differenzialgleichungen bzw. von Systemen gewöhnlicher Differenzialgleichungen enthält. Die Fallstudien hierzu zeigen, dass viele physikalische Modelle im Bauingenieurwesen auf Differenzialgleichungen führen, deren Lösung somit eine zentrale Rolle spielt. In Kapitel 3 werden Grundbegriffe der Finanzmathematik wie Zinsrechnung, Wirtschaftlichkeits- und Investitionsrechnung, Abschreibungs- und Rentenrechnung vermittelt, auf denen betriebswirtschaftliche Kenntnisse basieren. Diese gewinnen in zunehmendem Maß Bedeutung bei der Planung, Realisierung und Erhaltung von Bauvorhaben, beim Management von Immobilien oder bei der erfolgreichen Leitung von Unternehmen auch im Baubereich. Kapitel 4 ist der Statistik gewidmet, deren Gegenstand die Analyse und zahlenmäßige Erfassung zufälliger, d. h. nicht vorhersehbarer, Experimente ist. Diese hat im Bauingenieurwesen zunehmend Eingang gefunden, z. B. bei der Aus- und Bewertung von Messungen, bei der Vorhersage von Wahrscheinlichkeiten bestimmter Ereignisse, die als Grundlage für die Bemessung von Bauwerken benutzt werden, oder sogar bei der Bewertung von Immobilien.

Die Darstellung der Inhalte orientiert sich am Vorgänger „Mathematik für Bauingenieure 1 - Grundlagen für das Bachelor-Studium“, was das Studium dieses Buches erleichtern soll. Eine zielgerichtete, mathematisch korrekte und für das Bauingenieurwesen geeignete Darlegung steht dabei im Mittelpunkt. Kleingedruckte Ergänzungen wie z. B. Beweise erhöhen das mathematische Verständnis, sind aber für die Anwendung der Ergebnisse nicht zwingend erforderlich. Die überwiegende Mehrheit der Beispiele zur Illustration getroffener Aussagen bzw. zur Lösung praktischer Probleme ist aus dem Erfahrungsbereich Bauingenieurwesen entnommen. Fallstudien am Ende der Kapitel enthalten dafür typische Situationen, die Ableitung geeigneter mathematischer Modelle und die Lösung mit den dargestellten Methoden. Besonderer Wert ist auf eine strukturierte Gestaltung des mathematischen Textes gelegt. Zahlreiche Schlagwörter auf der Marginalienspalte erhöhen die Übersicht, gestatten bessere logische Nachvollziehbarkeit und helfen beim Nachschlagen. Die farbliche Gestaltung, insbesondere das Unterlegen resultierender Formeln und Ergebnisse sowie zahlreiche Grafiken und Bilder, dienen ebenfalls einem vertiefenden Verständnis. Ein ausführliches Sachwortverzeichnis soll die Arbeit mit dem Buch erleichtern. Zahlreiche Übungsaufgaben mit Lösungen stehen dem Leser unter der Internet-Adresse www.hanser-fachbuch.de/9783446449503 zur Verfügung.

Für die gewissenhafte Durchsicht des Buches danke ich sehr Herrn Dr. S. Steidel vom ITWM Fraunhofer in Kaiserslautern, Herrn R. Berweiler von der Universität Koblenz, Herrn Prof. Dr. J. Schanzbach von der HS Kaiserslautern sowie Herrn T. Seel, z. Zt. Master-Student im Studiengang Bauingenieurwesen der HS Kaiserslautern. Ein Dankeschön gilt ebenfalls vielen Studierenden des Studienganges Bauingenieurwesen der Hochschule Kaiserslautern, die Kontrollrechnungen der Übungsaufgaben vornahmen und so mithalfen, die angegebenen Lösungen zu verifizieren. Bei Herrn Ph. Thorwirth vom Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag bedanke ich mich herzlich für die Unterstützung beim Entstehen des vorliegenden Buches und die gute Zusammenarbeit mit dem Verlag.

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen mehrerer Veränderlicher	9
1.1 Der Begriff der Funktion mehrerer Veränderlicher	9
1.2 Grenzwerte, Stetigkeit, Partielle Ableitungen	12
1.3 Gradient, partielles und totales Differenzial, Fehlerrechnung	16
1.4 Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlicher	20
1.4.1 Definition lokaler Extrema	20
1.4.2 Notwendige Bedingungen für die Existenz lokaler Extrema	21
1.4.3 Hinreichende Bedingungen für die Existenz lokaler Extrema	22
1.5 Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher	24
1.5.1 Integration über ebene Bereiche	25
1.5.2 Kurvenintegrale	32
1.5.3 Der Satz von Green	37
1.6 Anwendungen an Beispielen	40
1.6.1 Ermittlung des Widerstandsmomentes	40
1.6.2 Vermessung eines Dreiecks	41
1.6.3 Wasserrinne mit Trapez-Querschnitt	42
2 Differenzialgleichungen	45
2.1 Einführung	45
2.2 Definitionen	47
2.3 Differenzialgleichungen 1. Ordnung	48
2.4 Trennung der Variablen	49
2.5 Lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung	50
2.6 Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten	52
2.6.1 Sätze über die Lösungen	53
2.6.2 Allgemeine Lösung von homogenen Differenzialgleichungen 2. Ordnung	55
2.6.3 Homogene Differenzialgleichungen höherer Ordnung	57
2.6.4 Allgemeine Lösung inhomogener Differenzialgleichungen höherer Ordnung	58
2.7 Lineare Systeme von Differenzialgleichungen 1. Ordnung	63
2.7.1 Definitionen, Beispiele	63
2.7.2 Lineare homogene Systeme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	67
2.8 Anwendungen an Beispielen	71
2.8.1 Mechanische Schwingung	71
2.8.2 Ausströmgeschwindigkeit einer Flüssigkeit	73
2.8.3 Gleichung einer Seilkurve	74

2.8.4	Knickkraft nach Euler	76
2.8.5	Biegelinie eines Balkens	78
2.8.6	Absenkung des Grundwasserspiegels mit einem vollkommenen Brunnen	80
2.8.7	Schwingungssystem	82
3	Finanzmathematik	85
3.1	Zinsen	85
3.1.1	Lineare Verzinsung	85
3.1.2	Regelmäßige Zahlungen	87
3.1.3	Geometrische Verzinsung	89
3.1.4	Unterjährige Verzinsung	93
3.1.5	Stetige Verzinsung	96
3.1.6	Zusammenfassung	98
3.2	Tilgungsrechnung	99
3.2.1	Tilgungsprozess	99
3.2.2	Annuitätentilgung	100
3.2.3	Ratentilgung	103
3.2.4	Zinsschuldtilgung	105
3.2.5	Zusammenfassung	105
3.3	Investitionsrechnung	106
3.3.1	Kapitalwertmethode	107
3.3.2	Methode des internen Zinsfußes	108
3.4	Abschreibungen	111
3.4.1	Abschreibungsprozess	111
3.4.2	Lineare Abschreibung	112
3.4.3	Geometrisch degressive Abschreibung	112
3.4.4	Übergang degressive - lineare Abschreibung	114
3.4.5	Arithmetisch degressive Abschreibung	115
3.4.6	Zusammenfassung	117
3.5	Berechnung des effektiven Zinssatzes	118
3.6	Rentenrechnung	120
3.6.1	Konstante Rente	120
3.6.2	Geometrisch wachsende Rente	125
3.6.3	Arithmetisch wachsende Rente	129
3.6.4	Zusammenfassung	134
4	Statistik	135
4.1	Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung	135

4.1.1	Kombinatorik	135
4.1.2	Zufällige Ereignisse	138
4.1.3	Definition der Wahrscheinlichkeit	140
4.1.4	Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit	141
4.1.5	Bedingte und totale Wahrscheinlichkeit	144
4.2	Zufallsvariablen	147
4.2.1	Zufallsvariablen und Verteilungsfunktion	147
4.2.2	Diskrete Verteilungen	149
4.2.3	Stetige Verteilungen	158
4.2.4	Grenzverteilungssätze	172
4.3	Beschreibende Statistik	177
4.3.1	Häufigkeitsverteilungen	177
4.3.2	Maßzahlen einer Stichprobe	181
4.4	Schließende Statistik	186
4.4.1	Stichprobenfunktionen	186
4.4.2	Statistische Schätzverfahren	189
4.4.3	Statistische Testverfahren	203
4.4.4	Der χ^2 -Anpassungstest	211
4.5	Anwendungen an Beispielen	214
4.5.1	Hochwasserabfluss	214
4.5.2	Beurteilung der Dicke von Betondeckungen	215
4.5.3	Beurteilung der Nutzungssicherheit von Bauwerken	217
4.5.4	Bewertung von Grundstücken	217
	Literaturverzeichnis	221
	Sachwortverzeichnis	223

1 Funktionen mehrerer Veränderlicher

Oft sind physikalische Größen nicht nur von einer, sondern mehreren Einflussgrößen abhängig. Beispielsweise wird das Volumen eines Quaders von drei Kantenlängen bestimmt. Die Verlängerung eines Stabes infolge einer Krafteinwirkung ist nach dem Gesetz von Hooke abhängig von dieser Kraft, der Länge des Stabes, seinem Querschnitt und seinem Elastizitätsmodul. Solche Abhängigkeiten werden durch Funktionen mehrerer Veränderlicher beschrieben. Funktionen zweier Veränderlicher können graphisch veranschaulicht werden. Der Begriff des Grenzwertes und der Stetigkeit wird erklärt. Partielle Ableitungen sind Grenzwerte der Differenzenquotienten bezüglich einer der Veränderlichen. Der Gradient wird zur Charakterisierung des Wachstums einer Funktion und zur Berechnung des totalen Differenzials benutzt. Damit ist z. B. die Bestimmung maximaler absoluter und relativer Messfehler bei Vorgabe der Toleranzen der Messgrößen möglich. Eine wichtige Rolle spielt die Ermittlung von Extremwerten von Funktionen mehrerer Veränderlicher. Flächen- und Volumenintegrale sind i. Allg. Integrale von Funktionen mehrerer Veränderlicher, mit denen z. B. die Berechnung von Momenten bei inhomogener Dichteverteilung erfolgt.

1.1 Der Begriff der Funktion mehrerer Veränderlicher

Die Veränderlichen, die eine physikalische Größe beeinflussen, werden in einem Vektor zusammengefasst. Der Definitionsbereich für Funktionen mehrerer Veränderlicher ist damit eine Teilmenge des Vektorraums \mathbb{R}^n oder der \mathbb{R}^n selber. Jetzt kann der Funktionsbegriff als eindeutige Zuordnung aus dem \mathbb{R}^n in die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} erklärt werden. Die graphische Veranschaulichung ist für Funktionen zweier Veränderlicher durch eine Oberfläche im Raum möglich. Isolinienbilder dienen ebenfalls der Darstellung der Funktionswerte - ähnlich wie die Höhenlinien auf einer Landkarte.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge des \mathbb{R}^n . Ist jeder Stelle $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \in D$ durch eine Vorschrift f *eindeutig* eine Zahl $z = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ zugeordnet, so heißt f **Funktion von n unabhängigen Veränderlichen** x_1, x_2, \dots, x_n auf dem Definitionsbereich $D_f = D$. Dabei ist z die **abhängige Veränderliche**.

Beispiel 1.2

1. Sind zwei Widerstände R_1 und R_2 im Stromkreis parallel geschaltet (siehe Bild 1.1), so errechnet sich ihr Gesamtwiderstand R aus dem **Gesetz von Ohm**

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{zu} \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Bezeichnungen

\mathbb{R}^n n -dimensionaler Vektorraum

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$

Vektor, Stelle

$X(x_1, x_2, \dots, x_n)$

zugehöriger Punkt

$\vec{OX} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$

zugehöriger Ortsvektor

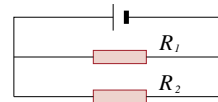
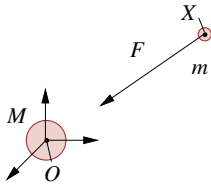


Bild 1.1 Parallele Widerstände

Definition 1.1

Funktionen mehrerer Veränderlicher

Bild 1.2 Gravitationskraft F

R ist *abhängig* von den beiden Widerständen R_1 und R_2 , also eine Funktion zweier Veränderlichen $R = R(R_1, R_2)$.

2. Die Gravitationskraft F zwischen zwei Körpern mit den Massen M und m berechnet sich nach dem **Gravitationsgesetz von Newton** zu

$$F = -\frac{\gamma m M}{|x|^2} \frac{x}{|x|},$$

wobei γ die Gravitationskonstante und $x = \overrightarrow{OX} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ der Ortsvektor des Schwerpunktes des Körpers mit der Masse m im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem mit dem Ursprung O im Schwerpunkt des Körpers mit der Masse M ist (siehe **Bild 1.2**). Die Kraft F ist ein dreidimensionaler Vektor, dessen Richtung durch den Einheitsvektor $-x/|x|$ gegeben ist und dessen Betrag $\gamma m M/|x|^2$ ist. Komponentenweise lautet diese Gleichung

$$F_i = -\frac{\gamma m M}{|x|^3} x_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Das bedeutet, dass die Kraftkomponenten F_1, F_2, F_3 jeweils abhängig von x_1, x_2, x_3 sind und daher Funktionen dreier Veränderlicher darstellen:

$$F_i = F_i(x_1, x_2, x_3).$$

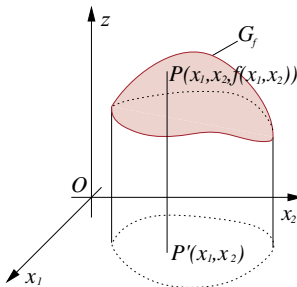
Definition 1.3

Der **natürliche Definitionsbereich** einer Funktion f ist diejenige Teilmenge des \mathbb{R}^n , für die die Zuordnung f erklärt ist.

Natürlicher Definitionsbereich

Beispiel 1.4

1. Die Funktion $f(x_1, x_2) = -4x_1 - 2x_2 + 4$ hat den natürlichen Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}^2$, da *jeder* Stelle $(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ durch diese Vorschrift eine reelle Zahl zugeordnet werden kann.
2. Die Funktion $R(R_1, R_2) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ hat als natürlichen Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(R_1, R_2)^\top : R_1 = -R_2\}$, da der Nenner in der Funktionsvorschrift für $R_1 = -R_2$ Null wird und somit der Bruch nicht erklärt ist. Der *für das physikalische Gesetz relevante Definitionsbereich* ist allerdings lediglich $\{(R_1, R_2)^\top : R_1 > 0 \wedge R_2 > 0\}$, da Widerstände positiv sind.
3. Die Funktionen $F_i(x_1, x_2, x_3) = -\frac{\gamma m M}{|x|^3} x_i$, $i = 1, 2, 3$, haben als natürlichen Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)^\top\}$, da der Nenner in den Funktionsvorschriften genau dann Null ist, wenn $|x| = 0$ gilt, also $x = (0, 0, 0)^\top$ ist. In diesem Fall fallen die Schwerpunkte der Körper mit den Massen M und m zusammen.

Bild 1.3 Graph einer Funktion $z = f(x_1, x_2)$

Graphische Darstellung

Die wesentlichen Unterschiede von Funktionen einer bzw. mehrerer Veränderlicher bestehen bereits für die Fälle $n = 1$ und $n = 2$. Für Funktionen mit mehr als zwei Veränderlichen kann verallgemeinert werden. Daher werden im Folgenden vorwiegend Funktionen zweier Veränderlicher studiert.

Die gleichzeitige graphische Darstellung von Definitionsbereich und Funktionswerten ist nur für Funktionen von bis zu zwei Veränderlichen möglich, da andernfalls mehr als drei Dimensionen dafür benötigt werden. Im Folgenden werden Möglichkeiten der graphischen Darstellung von Funktionen zweier Veränderlicher erläutert.

Im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem mit den Achsen x_1, x_2, z und dem Koordinatenursprung O wird der Definitionsbereich

D_f durch eine Teilmenge der (x_1, x_2) -Ebene dargestellt. Jeder Stelle $(x_1, x_2)^\top$ des Definitionsbereiches mit dem zugehörigen Punkt P' kann mit der Funktion $z = f(x_1, x_2)$ ein Punkt P mit dem Ortsvektor $(x_1, x_2, z)^\top \in \mathbb{R}^3$ zugeordnet werden. Der Punkt P' ist die **Projektion** des Punktes P auf die (x_1, x_2) -Ebene. Die Menge aller zugeordneten Punkte P bildet i. Allg. eine Oberfläche im Raum \mathbb{R}^3 (siehe **Bild 1.3**).

Die Menge der Punkte $G_f = \{(x_1, x_2, z) : (x_1, x_2)^\top \in D_f, z = f(x_1, x_2)\}$ heißt **Graph** der Funktion f .

Definition 1.5

Beispiel 1.6

Graphen von Funktionen

1. Der Graph der Funktion $f(x_1, x_2) = -4x_1 - 2x_2 + 4$ (vergleiche **Beispiel 1.4**) ist eine Ebene mit der Gleichung $z = -4x_1 - 2x_2 + 4$ (siehe **Bild 1.4**). Ihre Achsenabschnittsgleichung lautet $x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{z}{4} = 1$.
2. Der Graph der Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ heißt **Kreisparaboloid** (siehe **Bild 1.5**). Für $x_2 = 0$ folgt aus der Funktionsgleichung $f(x_1, 0) = x_1^2$. Die Menge der zugeordneten Punkte P ist eine Normalparabel in der (x_1, z) -Ebene. Analog folgt für $x_1 = 0$ aus der Funktionsgleichung $f(0, x_2) = x_2^2$. Die Menge der zugeordneten Punkte P ist eine Normalparabel in der (x_2, z) -Ebene. Für $z = c, c \geq 0$, folgt aus der Funktionsgleichung $c = x_1^2 + x_2^2$. Die Menge der zugeordneten Punkte P in der Ebene $z = c$ parallel zur (x_1, x_2) -Ebene ist jeweils ein Kreis mit dem Mittelpunkt $(0, 0, c)$ und dem Radius \sqrt{c} .

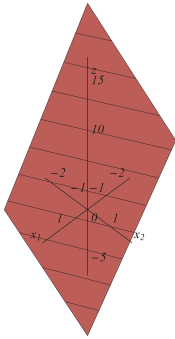


Bild 1.4 $f(x_1, x_2) = -4x_1 - 2x_2 + 4$

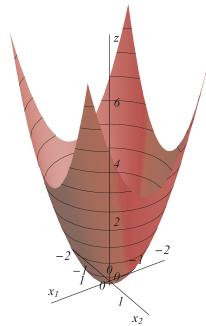


Bild 1.5 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

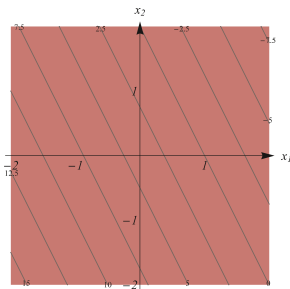


Bild 1.6 Isolinien $c = -4x_1 - 2x_2 + 4$

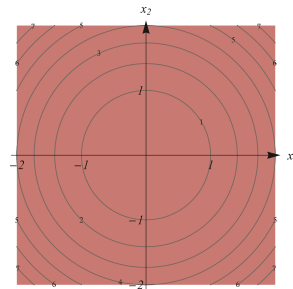


Bild 1.7 Isolinien $c = x_1^2 + x_2^2$

Definition 1.7

Ist $f(x_1, x_2)$ eine Funktion zweier Veränderlicher mit dem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$, so heißen die Punktmenge
 $I_c = \{(x_1, x_2, z) : (x_1, x_2)^\top \in D_f, z = f(x_1, x_2) = c\}$
Isolinien von f mit der Höhe c .

Isolinien**Beispiel 1.8**

1. Die Funktion $f(x_1, x_2) = -4x_1 - 2x_2 + 4$ (vergleiche **Beispiel 1.4** und **1.6**) hat als Isolinien Geraden (siehe **Bild 1.6**). Für die konstante Höhe $z = f(x_1, x_2) = c$ folgt aus der Funktionsgleichung

$$c = -4x_1 - 2x_2 + 4.$$

Umstellen nach x_2 liefert die Geradengleichung

$$x_2 = -2x_1 + 2 - \frac{c}{2}.$$

Diese Geraden sind parallel (sie haben alle denselben Anstieg -2) und schneiden die x_2 -Achse im Punkt $(0, 2 - c/2)$.

2. Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ (vergleiche **Beispiel 1.6**) hat für die konstante Höhe $z = f(x_1, x_2) = c$ als Isolinien Kreise mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung und dem Radius \sqrt{c} (siehe **Bild 1.7**).

1.2 Grenzwerte, Stetigkeit, Partielle Ableitungen

Der Begriff des Grenzwertes und der Stetigkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher basiert - wie auch bei Funktionen einer Veränderlichen - auf der Konvergenz von Folgen von Argumenten gegen eine Stelle des Definitionsbereiches. Partielle Ableitungen sind die Grenzwerte von Differenzenquotienten bezüglich einer der Veränderlichen. Für Funktionen zweier Veränderlicher ist die geometrische Interpretation ihrer partiellen Ableitungen möglich.

Grenzwerte

Abstand

In [4] wurde bereits der Begriff der Länge eines Vektors erklärt, der in diesem Abschnitt ebenfalls Anwendung findet. Der **Abstand** zweier Punkte X und Y , die den Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ entsprechen, ist die Länge des Vektors \overrightarrow{XY} , also die Zahl

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

1. Eine Funktion $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$, die jeder natürlichen Zahl k ein Element $a_k \in \mathbb{R}^n$ zuordnet, heißt **Folge** im \mathbb{R}^n . Sie wird mit $\{a_k\}$ bezeichnet.
2. Die Folge $\{a_k\} \in \mathbb{R}^n$ **konvergiert** gegen die Stelle $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, wenn gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k - \bar{x}| = 0.$$

Die Stelle \bar{x} heißt **Grenzwert** der Folge $\{a_k\}$, und man schreibt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \bar{x}.$$

Beispiel 1.10

1. Betrachtet wird die Folge mit den Gliedern $a_k = (2^{2-k}, 2^{1-k})^\top$, $k \in \mathbb{N}$ (siehe **Bild 1.8**). Die ersten Folgenglieder lauten $(2, 1)^\top$, $(1, 0.5)^\top$, $(0.5, 0.25)^\top$, ... Es wird gezeigt, dass diese Folge gegen die Stelle $\bar{x} = (0, 0)^\top$ konvergiert. Nach **Definition 1.9** wird $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k - \bar{x}|$ berechnet. Es ist

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k - \bar{x}| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{(2^{2-k} - 0)^2 + (2^{1-k} - 0)^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{2^{2(2-k)} + 2^{2(1-k)}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{(2^2 \cdot 2^{-2k} + 2^2) 2^{-2k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{20} / 2^k = 0. \end{aligned}$$

2. Betrachtet wird die Folge mit den Gliedern $a_k = (\sin(k\pi/2), 1/k^2)^\top$, $k \in \mathbb{N}$ (siehe **Bild 1.9**). Die ersten Folgenglieder sind $(1, 1)^\top$, $(0, 1/4)^\top$, $(-1, 1/9)^\top$, $(0, 1/16)^\top$, $(1, 1/25)^\top$, ... Die Punkte, die diesen Folgengliedern entsprechen, liegen abwechselnd auf den Geraden $x_1 = 1$, $x_1 = 0$, $x_1 = -1$. Es gibt keinen Punkt \bar{x} in der Ebene so, dass der Abstand der Folgenglieder zu diesem Punkt gegen 0 konvergiert. Welchen Punkt man auch immer wählt, es ist der Abstand derjenigen (unendlich vielen) Folgenglieder zu diesem Punkt, die auf den Geraden liegen, auf denen dieser Punkt sich nicht befindet, stets mindestens so groß wie der Abstand dieses Punktes zu den Geraden selbst.

Eine Funktion f mit dem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ hat für $x \rightarrow \bar{x}$ den **Grenzwert** $c \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = c, \quad x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n,$$

wenn für *jede* gegen \bar{x} konvergente Folge $\{a_k\}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = c.$$

Beispiel 1.12

Der Grenzwert der Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^3$ für $x \rightarrow \bar{x} = (2, 3)^\top$ ist zu ermitteln (siehe **Bild 1.10**).

Definition 1.9

Folgen und Grenzwert

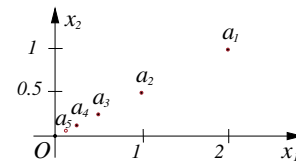


Bild 1.8 Folge $a_k = (2^{2-k}, 2^{1-k})^\top$

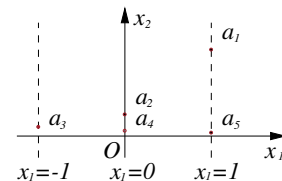


Bild 1.9 Folge $a_k = (\sin(k\pi/2), 1/k^2)^\top$

Definition 1.11

Grenzwert einer Funktion

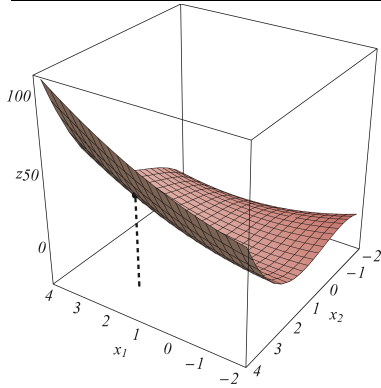


Bild 1.10 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^3$

Für jede Folge $\{a_k\} = \{(a_{k1}, a_{k2})^\top\}$, die gegen $\bar{x} = (2, 3)^\top$ konvergiert, gilt
 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k1} = 2$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k2} = 3$.

Mit den Rechenregeln für Grenzwerte konvergenter Zahlenfolgen (siehe z. B. [4]) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_{k1}, a_{k2}) &= \left(\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k1} \right)^2 + 2 \lim_{k \rightarrow \infty} a_{k1} \lim_{k \rightarrow \infty} a_{k2} + \left(\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k2} \right)^3 \\ &= 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3^3 = 43. \end{aligned}$$

Stetigkeit

Definition 1.13

Eine Funktion f mit dem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **stetig** an der Stelle $\bar{x} \in D_f$, wenn gilt

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}).$$

Die Funktion heißt **stetig**, wenn f an jeder Stelle des Definitionsbereiches D_f stetig ist.

Stetigkeit

Beispiel 1.14

Die Funktion

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2)^\top \neq (0, 0)^\top, \\ 0, & (x_1, x_2)^\top = (0, 0)^\top \end{cases}$$

(siehe **Bild 1.11**) ist *stetig* für alle $(x_1, x_2)^\top \neq (0, 0)^\top$.

Für $(x_1, x_2)^\top = (0, 0)^\top$ hingegen ist $f(x_1, x_2)$ *nicht stetig*. Wählt man z. B. die Folge mit den Gliedern $a_k = (1/k, 0)^\top$, die gegen die Stelle $(0, 0)^\top$ konvergiert, so erhält man als Grenzwert der Folge der zugehörigen Funktionswerte *nicht* den Funktionswert $f(0, 0) = 0$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1/k^2 - 0}{1/k^2 + 0} = 1 \neq f(0, 0).$$

Auch für die Folge mit den Gliedern $a_k = (2/k, 1/k)^\top$, die gegen die Stelle $(0, 0)^\top$ konvergiert, erhält man als Grenzwert der Folge der zugehörigen Funktionswerte *nicht* den Funktionswert $f(0, 0) = 0$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4/k^2 - 1/k^2}{4/k^2 + 1/k^2} = \frac{3}{5} \neq f(0, 0).$$

Offenbar ist der Grenzwert der Folge der Funktionswerte von $f(x_1, x_2)$ für verschiedene gegen die Stelle $(0, 0)^\top$ konvergierende Folgen nicht derselbe. Damit hat die Funktion $f(x_1, x_2)$ an der Stelle $(0, 0)^\top$ *keinen* Grenzwert und ist daher dort nicht stetig.

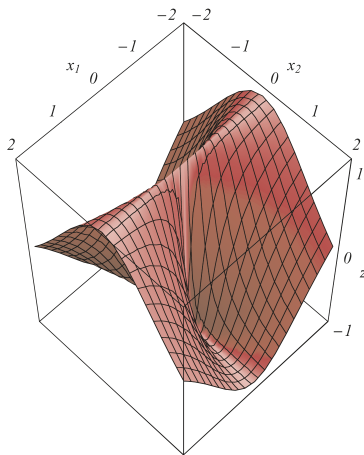


Bild 1.11
 $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2) / (x_1^2 + x_2^2)$

Die Rechenregeln für die Grenzwerte von Folgen bzw. Funktionen sind analog zu denen von Funktionen einer Veränderlichen. Insbesondere sind Summe, Produkt und Quotient (Nennerfunktion ungleich Null) stetiger Funktionen ebenfalls wieder stetige Funktionen.

Partielle Ableitungen

Sei f eine Funktion mit dem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$. Existiert für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ an einer festen Stelle $(x_1, \dots, x_n)^\top$ der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i},$$

so heißt er **partielle Ableitung** von f nach x_i an der Stelle $(x_1, \dots, x_n)^\top$ und wird wie folgt bezeichnet:

$$f_{x_i}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n).$$

Die Funktion f ist dort **partiell differenzierbar** nach x_i .

Beispiel 1.16

- Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^3$ ist an jeder Stelle des \mathbb{R}^2 nach x_1 und nach x_2 partiell differenzierbar. Es ist

$$f_{x_1} = 2x_1 + 2x_2 \quad \text{und} \quad f_{x_2} = 2x_1 + 3x_2^2.$$
- Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$ mit dem Definitionsbereich

$$D_f = \{(x_1, x_2)^\top : 0 < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty\}$$
ist an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches nach x_1 und nach x_2 partiell differenzierbar. Es ist

$$f_{x_1} = x_2 x_1^{x_2-1} \quad \text{und} \quad f_{x_2} = x_1^{x_2} \ln x_1.$$
- Die Funktion $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_2 x_3} + x_3$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}^3$ ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich partiell differenzierbar nach x_1 , x_2 und x_3 . Es ist

$$f_{x_1} = 0 \quad \text{und} \quad f_{x_2} = x_3 e^{x_2 x_3} \quad \text{und} \quad f_{x_3} = x_2 e^{x_2 x_3} + 1.$$

Definition 1.15

Differenzierbarkeit und Ableitungen

- Der Grenzwert $\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0}$ in **Definition 1.15** der partiellen Ableitung bezieht sich nur auf die Veränderung der i -ten Veränderlichen x_i der Argumente von f . Alle anderen Argumente sind fest. Die entsprechende partielle Ableitung nach x_i ist daher gleich der gewöhnlichen Ableitung von f nach x_i , wenn alle anderen Argumente als konstant betrachtet werden.
- Die partielle Ableitung f_{x_i} an der Stelle $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^\top$ ist gleich dem Anstieg der Tangente an den Graphen der Funktion $f(\bar{x}_1, \dots, x_i, \dots, \bar{x}_n)$ der *einen Veränderlichen* x_i an der Stelle \bar{x}_i .
Für eine Funktion zweier Veränderlicher x_1 und x_2 lauten die Gleichungen der beiden Tangenten (Geraden im Raum)

Bemerkung 1.17

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

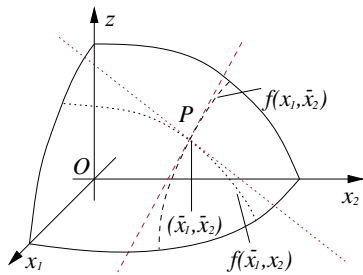


Bild 1.12 Tangenten an den Graphen von $f(x_1, x_2)$ an der Stelle $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)^T$



Hermann Amandus Schwarz
(* 25. Januar 1843 in Hermsdorf, Schlesien, † 30. November 1921 in Berlin)

deutscher Mathematiker, Professor in Halle, Zürich, Göttingen, Berlin, Mitglied der preußischen Akademie der Wissenschaften (1882), der Leopoldina (1885) und der Russischen Akademie der Wissenschaften (1897)

Funktionentheorie, Theorie der Minimalflächen, Schwarz-Christoffel-Transformation, Arbeiten über die hypergeometrische Differentialgleichung, Cauchy-Schwarz-Ungleichung, Spiegelungsprinzip von Schwarz, Alternierendes Verfahren von Schwarz zur Gebietszerlegung bei der Lösung elliptischer partieller Differentialgleichungen

hier: Satz von Schwarz

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_{x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix}.$$

Sie spannen die sogenannte **Tangentialebene** auf, die den Graphen der Funktion $z = f(x_1, x_2)$ im Punkt $P(\bar{x}_1, \bar{x}_2, f(\bar{x}_1, \bar{x}_2))$ berührt (siehe **Bild 1.12**).

- Existieren für eine Funktion f mit dem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ die partiellen Ableitungen bezüglich jedes Argumentes, so heißt f auf D_f **differenzierbar**.
- Die Rechenregeln für das Bilden der partiellen Ableitungen nach einer bestimmten Veränderlichen sind analog zu denen für Funktionen einer Veränderlichen. Alle anderen Veränderlichen betrachtet man dabei als konstant.
- Partielle Ableitungen höherer Ordnung erhält man als partielle Ableitungen der partiellen Ableitungen (die ihrerseits Funktionen mehrerer Veränderlicher sind). So ist z. B.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = f_{x_1 x_1}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = f_{x_1 x_2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = f_{x_2 x_1}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = f_{x_2 x_2}. \end{aligned}$$

- Nach dem **Satz von Schwarz** ist für eine auf ihrem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ p -mal stetig differenzierbare Funktion f die Reihenfolge des Differenzierens beim Bilden einer q -ten partiellen Ableitung mit $q \leq p$ unerheblich. Insbesondere gilt für zweimal stetig differenzierbare Funktionen f

$$f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j. \quad (1.1)$$

1.3 Gradient, partielles und totales Differenzial, Fehlerrechnung

Der Gradient einer differenzierbaren Funktion mehrerer Veränderlicher hat zentrale Bedeutung. Er gibt z. B. die Richtung des steilsten Anstiegs an. Mit seiner Hilfe kann das totale Differenzial berechnet werden, das bei der näherungsweise Berechnung von Funktionswerten und insbesondere bei der Fehlerrechnung verwendet wird.

Gradient

Ist eine Funktion f mit dem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ an einer Stelle $x \in D_f$ nach allen n Veränderlichen partiell differenzierbar, so heißt der Vektor der ersten partiellen Ableitungen von f **Gradient** von f an der Stelle x :

$$\text{grad } f(x) = (f_{x_1}(x), \dots, f_{x_n}(x))^T.$$

Der Gradient weist in Richtung des steilsten Anstieges der Funktion f an der Stelle x .

Beispiel 1.19

Die Funktion

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 10x_1 - x_2^2 + 10x_2 - 40 = -(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 5)^2 + 10$$

(siehe **Bild 1.13**) hat den Gradienten $\text{grad } f(x_1, x_2) = (-2x_1 + 10, -2x_2 + 10)^T$. An der Stelle $x = (4, 4)^T$ erhält man z. B. $\text{grad } f(4, 4) = (2, 2)^T$, an der Stelle $x = (3, 6)^T$ ergibt sich $\text{grad } f(3, 6) = (4, -2)^T$.

Der Graph der Funktion f ist ein Kreisparaboloid. Seine Isolinien sind Kreise mit dem Mittelpunkt $M(5, 5)$. In **Bild 1.14** sind die Isolinien zusammen mit den beiden Gradienten dargestellt.

Partielles und totales Differenzial

Das Differenzial df der an einer festen Stelle $x = \bar{x}$ differenzierbaren Funktion f einer Veränderlichen mit der Abweichung Δx ist erklärt als

$$df(\Delta x) = f'(\bar{x})\Delta x,$$

und für den Funktionswert $f(\bar{x} + \Delta x)$ gilt näherungsweise (siehe [4])

$$f(\bar{x} + \Delta x) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\Delta x = f(\bar{x}) + df(\Delta x).$$

Betrachtet man bei einer Funktion $f(x_1, x_2)$ zweier Veränderlicher eine Stelle $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^T$ und fixiert \bar{x}_2 , so erhält man die Funktion $f(x_1, \bar{x}_2)$, die jetzt nur noch von *einer* Veränderlichen abhängt. Für den Funktionswert $f(\bar{x}_1 + \Delta x_1, \bar{x}_2)$ gilt dann

$$f(\bar{x}_1 + \Delta x_1, \bar{x}_2) \approx f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + f_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\Delta x_1 = f(\bar{x}) + df_{x_1}(\Delta x_1),$$

mit dem **partiellen Differenzial** nach der Veränderlichen x_1

$$df_{x_1}(\Delta x_1) = f_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\Delta x_1 = f_{x_1}(\bar{x})\Delta x_1.$$

Das partielle Differenzial nach der Veränderlichen x_1 gibt näherungsweise den Funktionswertzuwachs der Funktion f an, wenn man sich von der Stelle $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^T$ *nur in Richtung der x_1 -Koordinate* um die Abweichung Δx_1 wegbewegt. Analog erhält man bei fixiertem \bar{x}_1 und der Abweichung Δx_2

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2 + \Delta x_2) \approx f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + f_{x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\Delta x_2 = f(\bar{x}) + df_{x_2}(\Delta x_2)$$

Definition 1.18

Gradient an einer Stelle

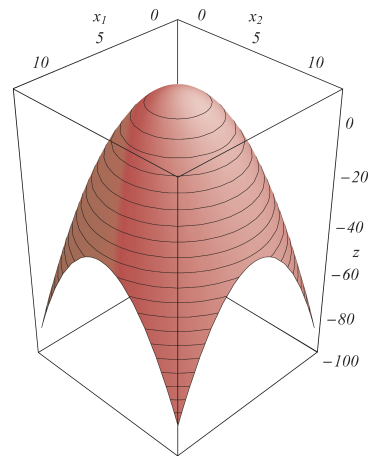


Bild 1.13

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 10x_1 - x_2^2 + 10x_2 - 40$$

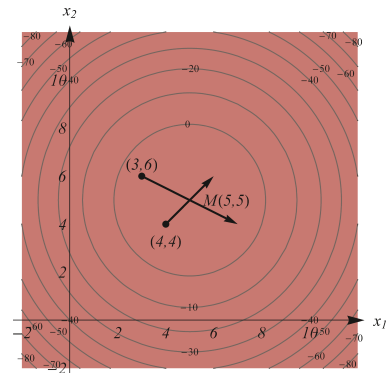


Bild 1.14 Isolinien, Gradienten

mit dem **partiellen Differenzial** nach der Veränderlichen x_2

$$df_{x_2}(\Delta x_2) = f_{x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\Delta x_2 = f_{x_2}(\bar{x})\Delta x_2.$$

Entsprechend ist für eine Funktion f mit n Veränderlichen x_1, \dots, x_n das partielle Differenzial nach der Veränderlichen x_i an der Stelle \bar{x}

Partielles Differenzial

$$df_{x_i} = f_{x_i}(\bar{x})\Delta x_i, \quad \Delta x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Definition 1.20 Totales Differenzial

Sei f eine auf dem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ differenzierbare Funktion, $\bar{x} \in D_f$ eine feste Stelle und $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)^\top$ ein reeller Vektor. Die Funktion des Vektors $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)^\top$

$$df(\Delta x) = (\text{grad}f(\bar{x}), \Delta x) = f_{x_1}(\bar{x})\Delta x_1 + \dots + f_{x_n}(\bar{x})\Delta x_n \quad (1.2)$$

heißt **totales Differenzial** der Funktion f an der Stelle \bar{x} .

Näherung von Funktionswerten

Das totale Differenzial $df(\Delta x)$ der Funktion f an der Stelle \bar{x} gibt näherungsweise den Zuwachs des Funktionswertes von f an, wenn man sich von der Stelle \bar{x} in eine *beliebige* Richtung mithilfe des Vektors Δx wegbewegt. An der Stelle $x = \bar{x} + \Delta x$ gilt die Näherungsformel

$$f(x) = f(\bar{x} + \Delta x) \approx f(\bar{x}) + df(\Delta x). \quad (1.3)$$

Beispiel 1.21

Für die Funktion

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 10x_1 - x_2^2 + 10x_2 - 40 = -(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 5)^2 + 10$$

aus **Beispiel 1.19** mit dem Funktionswert $f(7, 4) = 5$ soll näherungsweise der Funktionswert an den Stelle $(7.2, 4.3)^\top$ und $(7.2, 4.1)^\top$ mithilfe des totalen Differenzials ermittelt werden.

Es ist $\bar{x} = (7, 4)^\top$, $f_{x_1} = -2x_1 + 10$, $f_{x_2} = -2x_2 + 10$.

An der Stelle $(7.2, 4.3)^\top$ ergibt sich mit $\Delta x = (0.2, 0.3)^\top$ das totale Differenzial $df(0.2, 0.3) = f_{x_1}(7, 4) \cdot 0.2 + f_{x_2}(7, 4) \cdot 0.3 = (-4) \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.3 = -0.2$.

Als näherungsweise Funktionswert ergibt sich nach Gleichung (1.3)

$$f(7.2, 4.3) \approx f(7, 4) - 0.2 = 5 - 0.2 = 4.8.$$

Der genaue Funktionswert ist $f(7.2, 4.3) = 4.67$.

An der Stelle $(7.2, 4.1)^\top$ ergibt sich analog mit $\Delta x = (0.2, 0.1)^\top$ $df(0.2, 0.1) = f_{x_1}(7, 4) \cdot 0.2 + f_{x_2}(7, 4) \cdot 0.1 = (-4) \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.1 = -0.6$.

Damit ist der näherungsweise Funktionswert

$$f(7.2, 4.1) \approx f(7, 4) - 0.6 = 5 - 0.6 = 4.4.$$

Der genaue Funktionswert ist $f(7.2, 4.1) = 4.35$.

Fehlerrechnung

Wie bereits bei Funktionen einer Veränderlichen finden Differenzial und näherungsweise Funktionswertberechnung auch bei Funktionen mehrerer Veränderlicher Anwendung bei der Fehlerrechnung. Dabei wer-

den anstelle der wahren Werte x_1, \dots, x_n jeweils die Näherungswerte $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ mit den Toleranzen $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n \geq 0$ für die Messfehler ermittelt. Bestimmt werden soll der maximal mögliche absolute und relative Fehler bei der Funktionswertermittlung mit den gemessenen Werten.

Der absolute Fehler ist die Differenz aus dem wahren Funktionswert an der Stelle $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ und dem genäherten Funktionswert an der Messstelle $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^\top$, wobei die wahren Werte im Toleranzbereich liegen: $x_i \in [\bar{x}_i - \Delta x_i, \bar{x}_i + \Delta x_i]$ bzw.

$$|x_i - \bar{x}_i| \leq \Delta x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Mit Gleichung (1.3) folgt für den Betrag des absoluten Fehlers

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\bar{x})| &\approx |df(x - \bar{x})| \\ &= |f_{x_1}(\bar{x})(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + f_{x_n}(\bar{x})(x_n - \bar{x}_n)| \\ &\leq |f_{x_1}(\bar{x})| \Delta x_1 + \dots + |f_{x_n}(\bar{x})| \Delta x_n. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Der relative Fehler ist das Verhältnis des absoluten Fehlers zum Funktionswert. Sein Betrag lässt sich mithilfe von (1.4) abschätzen:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f(\bar{x})}{f(\bar{x})} \right| &\approx \left| \frac{df(x - \bar{x})}{f(\bar{x})} \right| \\ &\leq \frac{1}{|f(\bar{x})|} (|f_{x_1}(\bar{x})| \Delta x_1 + \dots + |f_{x_n}(\bar{x})| \Delta x_n). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Beispiel 1.22

Mit welchem relativen Fehler kann das Volumen eines zylinderförmigen Turmes mit Kegelspitze (siehe **Bild 1.15**) ermittelt werden, wenn der Grundkreisradius r , die Höhe h des Zylinders und die Höhe h_s der Kegelspitze jeweils mit einem relativen Messfehler nicht größer als 1 % bestimmt wurden?

Das Volumen des zylinderförmigen Turmes mit Kegelspitze beträgt

$$V = V(r, h, h_s) = \pi r^2 \left(h + \frac{1}{3} h_s \right).$$

Mit Gleichung (1.2) erhält man für das totale Differenzial

$$dV = V_r \Delta r + V_h \Delta h + V_{h_s} \Delta h_s = 2\pi r \left(h + \frac{1}{3} h_s \right) \Delta r + \pi r^2 \Delta h + \frac{1}{3} \pi r^2 \Delta h_s.$$

Für den maximalen relativen Fehler ergibt sich damit aus (1.5)

$$\begin{aligned} \left| \frac{dV}{V} \right| &= \left| \frac{2}{r} \Delta r + \frac{\Delta h}{h + h_s/3} + \frac{\Delta h_s}{3(h + h_s/3)} \right| \\ &= \left| 2 \frac{\Delta r}{r} + \frac{h}{h + h_s/3} \frac{\Delta h}{h} + \frac{h_s}{3(h + h_s/3)} \frac{\Delta h_s}{h_s} \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{\Delta r}{r} \right| + \frac{h}{h + h_s/3} \left| \frac{\Delta h}{h} \right| + \frac{h_s}{3(h + h_s/3)} \left| \frac{\Delta h_s}{h_s} \right| \\ &\leq \left(2 + \frac{h}{h + h_s/3} + \frac{h_s}{3(h + h_s/3)} \right) \cdot 1\% = 3\%. \end{aligned}$$

Das Volumen kann mit einem maximalen relativen Messfehler von 3 % ermittelt werden.

Absoluter Fehler

Relativer Fehler

Fehlerrechnung

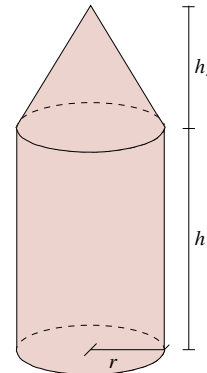


Bild 1.15 Turm mit Kegelspitze

1.4 Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Mit dem Begriff der Umgebung einer Stelle werden lokale und globale Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlicher erklärt. Für differenzierbare Funktionen werden notwendige und hinreichende Kriterien für die Existenz lokaler Extremwerte angegeben. Die Klassifikation kritischer Stellen umfasst auch sogenannte Sattelpunkte, in denen die notwendigen Bedingungen erfüllt sind, aber trotzdem kein lokaler Extremwert vorliegt.

1.4.1 Definition lokaler Extrema

Definition 1.23

Die **Umgebung** $U_r(\bar{x})$ einer Stelle $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge aller Stellen $x \in \mathbb{R}^n$, für die der Abstand zur Stelle \bar{x} kleiner als r ist:

$$|\bar{x} - x| < r.$$

Umgebung einer Stelle

Beispiel 1.24

Für $n = 1$ ist die Menge \mathbb{R} durch die Zahlengerade darstellbar und \bar{x} durch den entsprechenden Punkt auf ihr. Die Umgebung $U_r(\bar{x})$ ist das Intervall $(\bar{x} - r, \bar{x} + r)$.

Für $n = 2$ ist die Menge \mathbb{R}^2 durch eine Ebene darstellbar, \bar{x} durch den entsprechenden Punkt auf ihr und die Umgebung $U_r(\bar{x})$ durch die inneren Punkte des Kreises mit diesem Mittelpunkt und dem Radius r .

Für $n = 3$ ist die Menge \mathbb{R}^3 durch den dreidimensionalen Raum darstellbar, \bar{x} durch den entsprechenden Punkt darin und die Umgebung $U_r(\bar{x})$ durch die inneren Punkte der Kugel mit diesem Mittelpunkt und dem Radius r .

Definition 1.25

Sei f eine Funktion mit dem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Funktion f hat an der Stelle $\bar{x} \in D_f$

1. ein **lokales Minimum (Maximum)**, falls es eine Umgebung $U_r(\bar{x})$ gibt, sodass für alle $x \in U_r(\bar{x})$ gilt

$$f(x) \geq f(\bar{x}) \quad (f(x) \leq f(\bar{x})),$$

2. ein **strenges lokales Minimum (Maximum)**, falls es eine Umgebung $U_r(\bar{x})$ gibt, sodass für alle $x \in U_r(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$ gilt

$$f(x) > f(\bar{x}) \quad (f(x) < f(\bar{x})).$$

Lokale Extrema

Beispiel 1.26

1. Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ (siehe **Beispiel 1.6, Bild 1.16**) hat an der Stelle $\bar{x} = (0, 0)^\top$ ein strenges lokales Minimum: $f(0, 0) = 0$. Für *alle* Stellen $(x_1, x_2)^\top \neq (0, 0)^\top$ gilt offenbar $f(x_1, x_2) > 0 = f(0, 0)$ und damit z. B. auch für alle Stellen von $U_1(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$.
2. Die Funktion $f(x_1, x_2) = 10 - x_1^2 - x_2^2$ (siehe **Bild 1.17**) hat an der Stelle

$\bar{x} = (0, 0)^\top$ ein strenges lokales Maximum: $f(0, 0) = 10$. Für *alle* Stellen $(x_1, x_2)^\top \neq (0, 0)^\top$ gilt offenbar $f(x_1, x_2) < 10 = f(0, 0)$ und damit z. B. auch für alle Stellen der Umgebung $U_1(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$.

3. Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_2^2$ (siehe **Bild 1.18**) hat an der Stelle $\bar{x} = (0, 0)^\top$ ein lokales Minimum: $f(0, 0) = 0$. Für alle Stellen der Umgebung $U_1(\bar{x})$ gilt $f(x_1, x_2) \geq 0 = f(0, 0)$, allerdings sind auch für die Stellen $(x_1, 0)^\top \in U_1(\bar{x})$ mit $x_1 \neq 0$ die Funktionswerte gleich Null: $f(x_1, 0) = 0 = f(0, 0)$. Daher ist das Minimum kein strenges.

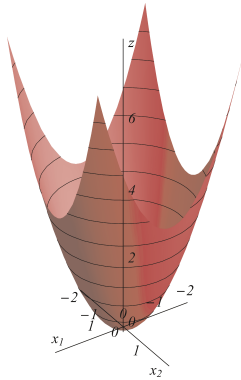


Bild 1.16 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

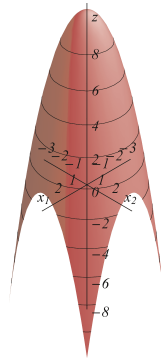


Bild 1.17 $f(x_1, x_2) = 10 - x_1^2 - x_2^2$

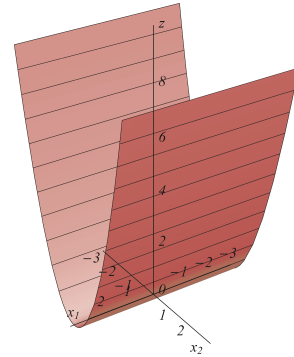


Bild 1.18 $f(x_1, x_2) = x_2^2$

Im folgenden Abschnitt geht es um die Bestimmung lokaler Extrema von *partiell differenzierbaren* Funktionen, obwohl die Definition der lokalen Extrema ohne den Differenzierbarkeitsbegriff auskommt.

1.4.2 Notwendige Bedingungen für die Existenz lokaler Extrema

Im Fall differenzierbarer Funktionen einer Veränderlichen bedingt ein lokaler Extremwert an der Stelle \bar{x} dort den Anstieg Null. Die Tangente an den Graphen der Funktion verläuft dort parallel zur x -Achse.

Für differenzierbare Funktionen zweier Veränderlicher kann analog geschlossen werden, dass die Tangentialebene an der lokalen Extremstelle \bar{x} an den Graphen der Funktion $f(x_1, x_2)$ horizontal liegen muss, d. h. parallel zur (x_1, x_2) -Ebene ist. Die Tangentialebene wird von den Tangentialvektoren $(1, 0, f_{x_1}(\bar{x}))^\top$ und $(0, 1, f_{x_2}(\bar{x}))^\top$ aufgespannt (siehe **Abschnitt 1.2**). Die Forderung, dass die Tangentialebene parallel zur (x_1, x_2) -Ebene verläuft, bedeutet, dass die z -Komponenten beider Vektoren gleich Null sein müssen: $f_{x_1}(\bar{x}) = f_{x_2}(\bar{x}) = 0$.

Sei f eine auf $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ definierte und dort differenzierbare Funktion. Hat f an der Stelle $\bar{x} \in D_f$ ein lokales Extremum, so gilt

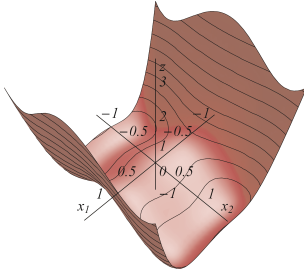
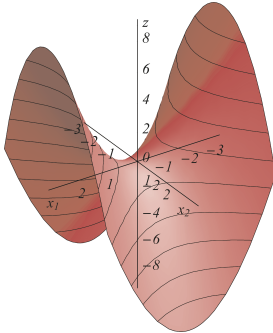
$$f_{x_i}(\bar{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.6)$$

Satz 1.27

Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum

Bemerkung 1.28

1. Stellen \bar{x} , für die die Bedingung (1.6) des **Satzes 1.27** erfüllt ist, heißen **kritische Stellen**.
2. Kritische Stellen \bar{x} , die keine lokalen Extremwerte liefern, heißen **Sattelpunkte**.

Bedingung für lokale Extrema**Bild 1.19** $f(x_1, x_2) = 2x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_2^2$ **Sattelpunkt****Bild 1.20** $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ **Beispiel 1.29**

An welchen Stellen kann die Funktion $f(x_1, x_2) = 2x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_2^2$ (siehe **Bild 1.19**) lokale Extrema haben?

Die notwendigen Bedingungen für die Existenz lokaler Extrema sind nach (1.6)

$$f_{x_1} = 8x_1^3 - 2x_1 = 0 \quad \text{und} \quad f_{x_2} = 4x_2^3 - 4x_2 = 0.$$

Die erste Gleichung lautet nach Ausklammern $2x_1(2x_1 - 1)(2x_1 + 1) = 0$ und hat die drei Lösungen $x_1 = 0, 0.5, -0.5$. Die zweite Gleichung lautet nach Ausklammern $4x_2(x_2 - 1)(x_2 + 1) = 0$ und hat die drei Lösungen $x_2 = 0, 1, -1$. Da beide Bedingungen *gleichzeitig* erfüllt sein müssen, ergeben sich folgende neun Stellen als mögliche Stellen lokaler Extrema:

$$(0, 0)^\top, (0, 1)^\top, (0, -1)^\top, (0.5, 0)^\top, (0.5, 1)^\top, (0.5, -1)^\top, (-0.5, 0)^\top, (-0.5, 1)^\top, (-0.5, -1)^\top.$$

Beispiel 1.30

Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ hat die kritische Stelle $\bar{x} = (0, 0)^\top$, denn die notwendigen Bedingungen

$$f_{x_1} = 2x_1 = 0 \quad \text{und} \quad f_{x_2} = -2x_2 = 0$$

sind offenbar genau für $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ erfüllt. Trotzdem gibt es keine Umgebung der Stelle $\bar{x} = (0, 0)^\top$, in der alle Funktionswerte entweder kleiner oder gleich bzw. größer oder gleich $f(0, 0) = 0$ wären. Wählt man eine *beliebige* Umgebung $U_r(\bar{x})$, so ist z. B. für alle Stellen $(x_1, 0)^\top$ mit $|x_1| < r$ dieser Umgebung $f(x_1, 0) = x_1^2 \geq 0$, während für alle Stellen $(0, x_2)^\top$ mit $|x_2| < r$ dieser Umgebung $f(0, x_2) = -x_2^2 \leq 0$ ist. Damit kann die Funktion an der Stelle $\bar{x} = (0, 0)^\top$ keinen lokalen Extremwert haben. Die Funktion f ist in **Bild 1.20** dargestellt.

1.4.3 Hinreichende Bedingungen für die Existenz lokaler Extrema

Dafür, dass eine Funktion f an einer kritischen Stelle \bar{x} einen lokalen Extremwert hat, ist es erforderlich, dass die Funktion dort eine einheitliche Krümmung aufweist, d. h. dass sie z. B. in *jeder* Richtung, die von \bar{x} wegweist, ansteigt (oder absteigt). Die Krümmung für eine Funktion f zweier Veränderlicher wird charakterisiert mit der folgenden Definition:

Definition 1.31

Eine auf ihrem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ zweimal stetig differenzierbare Funktion f ist an der Stelle $\bar{x} \in D_f$ **konvex (konkav)**, wenn dort gilt

$$f_{x_1 x_1} \geq (\leq) 0 \quad \text{und} \quad f_{x_1 x_1} f_{x_2 x_2} \geq (f_{x_1 x_2})^2. \quad (1.7)$$